រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Prepared by : LIM PHALKUN

គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

សម្រាប់សិស្សពូកែ និង អាហារូបករណ៍

រួមមាន៖

- វិសមភាព Inequality
- សមីការអនុគមន៍ Functional Equation
- ទ្រឹស្តីចំនួន Number Theory
- ធរណីមាត្រ Geometry

Problem and Solution

គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

- វិសមភាព
- សមីការអនុគមន៍
- ទ្រឹស្ដីចំនួន
- ធរណីមាត្រ

រក្សាសិទ្ធិ ដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆាវី
លោក លឹម ឆុន
លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទរ័

លោកស្រី លី គុណ្ណកា លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ គណិតវិទ្យាជ្រើសរើសដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងរួមមានបួនជំពូកគឺ វិសមភាព សមីការអនុគមន៍ ទ្រឹស្តីចំនួន និង ធរណីមាត្រ ដែលក្នុងជំពូកនីមួយៗ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ពិសេសៗមកធ្វើដំណោះស្រាយ ព្រមទាំងមានលំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។
យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យាកំរិតអូឡាំពិចចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។
ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី09តុលា ឆ្នាំ2011
អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

វិសមភាពជ្រើសរើស

លំហាត់

១-គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយថា $(1+\frac{1}{a})^b(1+\frac{1}{b})^c(1+\frac{1}{c})^a \geq 1+\frac{1}{ab+bc+ca}$ ។

២-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}$$

៣-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \geq \sqrt{abc}+\frac{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}{\sqrt{2}}$$

៤-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2ab}}\geq\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

៥-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}}+\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 2$$

៦-ឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{n+3}{2}$$

ដែល $n\geq 2\,,\,n\in IN$ ។

៧-ចំពោះ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a^5+2b^5+4c^5+7}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{4a^5+b^5+2c^5+7}{bc(\sqrt{b}+\sqrt{c})}+\frac{2a^5+4b^5+c^5+7}{ca(\sqrt{c}+\sqrt{a})}\geq 21$$

៨-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$a^2\sin A+b^2\sin B+c^2\sin C\geq 6S$?

(S តាងឲ្យក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC)

៩-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ស្រាយថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{27}{2}.\frac{(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6}\geq 2$

១០-គេឲ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 4$$ ។

១១-គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}}+\frac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}}+\frac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}}\geq 3\sqrt{2}$$

១២-គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq \frac{5}{2}$$ ។

(**Spain Mathematical Olympiad 2011**)

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយថា $(1+\frac{1}{a})^b(1+\frac{1}{b})^c(1+\frac{1}{c})^a \geq 1+\frac{1}{ab+bc+ca}$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})=\ln(x+1)-\ln x$ ដែល $0<x<1$

គេមាន $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$

និង $f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}>0$ គ្រប់ $0<x<1$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព Jensen ចំពោះ $a,b,c>0$ គេបាន ៖

$$\frac{af(c)+bf(a)+cf(b)}{a+b+c}\geq f(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c})$$ ដោយ $a+b+c=1$

គេបាន ៖

$$a\ln(1+\frac{1}{c})+b\ln(1+\frac{1}{a})+c\ln(1+\frac{1}{b})\geq \ln(1+\frac{1}{ab+bc+ca})$$

$$\ln\left[(1+\frac{1}{c})^a(1+\frac{1}{a})^b(1+\frac{1}{b})^c\right]\geq \ln(1+\frac{1}{ab+bc+ca})$$

ដូចនេះ $(1+\frac{1}{a})^b(1+\frac{1}{b})^c(1+\frac{1}{c})^a\geq 1+\frac{1}{ab+bc+ca}$ ។

របៀបទី២

យើងដឹងថា $\int_0^1 \frac{b}{x+a}.dx = b\left[\ln(x+a)\right]_0^1=\ln(1+\frac{1}{a})^b$

តាម Lemma Cauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$\sum_{cyc}\frac{b}{x+a}=\sum_{cyc}\frac{b^2}{bx+ab}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)x+ab+bc+ca}$$

ដោយ $a+b+c=1$ នោះ $\sum_{cyc}\frac{b}{x+a}\geq\frac{1}{x+ab+bc+ca}$

គេបាន $\int_0^1\sum_{cyc}\frac{b}{x+a}.dx\geq\int_0^1\frac{dx}{x+ab+bc+ca}$

ដោយ $\int_0^1\sum_{cyc}\frac{b}{x+a}.dx=\sum_{cyc}\int_0^1\frac{b}{x+a}dx=\sum_{cyc}\ln(1+\frac{1}{a})^b$

$$=\ln\left[(1+\frac{1}{a})^b(1+\frac{1}{b})^c(1+\frac{1}{c})^a\right]$$

ហើយ $\int_0^1\frac{dx}{x+ab+bc+ca}=\ln(1+\frac{1}{ab+bc+ca})$

ដូចនេះ $(1+\frac{1}{a})^b(1+\frac{1}{b})^c(1+\frac{1}{c})^a\geq1+\frac{1}{ab+bc+ca}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $AM-HM$ គេមាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\ (\forall x,y>0)$

ដោយ $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$

គេបាន $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 4(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

តាម Lemma Cauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{a(b+c)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2}$$

ដោយ $4\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$

ហើយ $\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\ge\frac{3}{2}$ នោះ $4\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}$

ដូចនេះ $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \geq \sqrt{abc} + \frac{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}{\sqrt{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=(a+b)(b+c)(c+a)$, $v=abc$

គេមានសមភាព

$$u+v=(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

វិសមភាពខាងលើសមមូល $\sqrt{u+v} \geq \sqrt{v} + \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}}$

លើកជាការេ $u+v \geq v + \frac{u}{2} + \sqrt{2}\sqrt{uv}$ ឬ $u \geq 2\sqrt{2}\sqrt{uv}$

សមមូល $u^2 \geq 8uv$ ឬ $u \geq 8v$ ពិត

ព្រោះ $u=(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}=8abc=8v$

ដូចនេះ $\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \geq \sqrt{abc} + \frac{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}{\sqrt{2}}$

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2ab}}\geq\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ជាដំបូងយើងនឹងស្រាយថា $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}\leq\sqrt{2}(b+c)$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc})^2\leq 2(b+c)^2$$

$$b^2+c^2+2\sqrt{2bc(b^2+c^2)}+2bc\leq 2b^2+4bc+2c^2$$

$$2\sqrt{2bc(b^2+c^2)}\leq b^2+c^2+2bc$$

$(\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{2bc})^2\geq 0$ **ពិត**

គេបាន $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ពិត

ព្រោះ $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$ (មើលលំហាត់ទី២) ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}}+\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 2$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{a^2}{4bc}+\dfrac{b^2}{4ca}+\dfrac{c^2}{4ab}\right)$

ដោយ $\dfrac{a^2}{4bc}\geq\dfrac{a^2}{(b+c)^2}$ ព្រោះ $(b+c)^2\geq 4bc$

គេបាន $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geq\dfrac{4}{3}\left[\dfrac{a^2}{(b+c)^2}+\dfrac{b^2}{(c+a)^2}+\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right]$

តាមវិសមភាពCauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$3\left[\frac{a^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2}{(a+b)^2}\right]\geq\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2$$

គេទាញ $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}\geq\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)^2$

នាំឲ្យ $\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}} \geq \frac{2}{3}(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$

តាម Lemma Cauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{a(b+c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = 1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

គេទាញ $\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}} \geq \frac{2}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}$

$$\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}}+\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{2}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}+\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}+\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{4}{3}$

តាង $t=\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}} \geq 1$ គេបាន ៖

$\frac{t^3}{3}+\frac{1}{t} \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(t^2+t+3)}{3t} \geq 0$ **ពិត**

ដូចនេះ $\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}}+\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 2$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{n+3}{2}$$

ដែល $n\geq 2\ ,\ n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$

តាម Lemma Cauchy-Schwarz គេបាន ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{n+1}{2}$

តាង $t=\sqrt[n]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}\geq 1$ គេបាន $\frac{t^n}{2}+\frac{n}{2t}\geq\frac{n+1}{2}$

សមមូល $t^n+\frac{n}{t}\geq n+1$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន ៖

$$t^n + \underbrace{\frac{1}{t} + \frac{1}{t} + ... + \frac{1}{t}}_{n} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{t^n . \frac{1}{t^n}} = n+1$$

ឬ $t^n + \frac{n}{t} \geq n+1$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 1 + \frac{n+1}{2} = \frac{n+3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{n+3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧

ចំពោះ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a^5+2b^5+4c^5+7}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{4a^5+b^5+2c^5+7}{bc(\sqrt{b}+\sqrt{c})}+\frac{2a^5+4b^5+c^5+7}{ca(\sqrt{c}+\sqrt{a})}\geq 21$$

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង

$$T=\frac{a^5+2b^5+4c^5+7}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{4a^5+b^5+2c^5+7}{bc(\sqrt{b}+\sqrt{c})}+\frac{2a^5+4b^5+c^5+7}{ca(\sqrt{c}+\sqrt{a})}\geq 21$$

$$=\sum_{cyc}\frac{a^5+2b^5+4c^5+7}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន $t^5+1\geq 2\sqrt{t^5}$

គេបាន $a^5+2b^5+4c^5+7=(a^5+1)+2(b^5+1)+4(c^5+1)$

$$\geq 2\sqrt{a^5}+4\sqrt{b^5}+8\sqrt{c^5}$$

គេបាន $T\geq 2\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a^5}+2\sqrt{b^5}+4\sqrt{c^5}}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

តាង $x=\sqrt{a}\ ,y=\sqrt{b}\ ,z=\sqrt{c}$ គេបាន $T\geq 2\sum_{cyc}\frac{x^5+2y^5+4z^5}{x^2y^2(x+y)}$

ពិនិត្យ $(x^2-y^2)(x^3-y^3)=x^5+y^5-x^2y^2(x+y)\geq 0$

ឬ $x^5+y^5\geq x^2y^2(x+y)\Rightarrow \frac{1}{x^2y^2(x+y)}\geq\frac{1}{x^5+y^5}$

គេទាញបាន $T\geq 2\sum_{cyc}\frac{x^5+2y^5+4z^5}{x^5+y^5}$

តាង $u=x^5\ ,v=y^5\ ,w=z^5$ គេបាន $T\geq 2\sum_{cyc}\frac{u+2v+4w}{u+v}$

ដោយ $\frac{u+2v+4w}{u+v}=1+\frac{v+4w}{u+v}$ នោះ $T\geq 6+2\sum_{cyc}\frac{v+4w}{u+v}$

ដើម្បីស្រាយថា $T\geq 21$ យើងគ្រាន់តែស្រាយឲ្យឃើញថា

$\sum_{cyc}\frac{v+4w}{u+v}\geq\frac{15}{2}$ ។

តាម Lemma Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum_{cyc}\frac{v+4w}{u+v}=\sum_{cyc}\frac{(v+4w)^2}{(u+v)(v+4w)}\geq\frac{25(u+v+w)^2}{u^2+v^2+w^2+9(uv+vw+uw)}$$

ឬ $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{v+4w}{u+v}\geq\frac{25\sum_{cyc}u^2+50\sum_{cyc}uv}{\sum_{cyc}u^2+9\sum_{cyc}uv}$

ឧបមាថា $\displaystyle\frac{25\sum_{cyc}u^2+50\sum_{cyc}uv}{\sum_{cyc}u^2+9\sum_{cyc}uv}\geq\frac{15}{2}$ ពិត

សមមូល $\displaystyle 50\sum_{cyc}u^2+100\sum_{cyc}uv\geq 15\sum_{cyc}u^2+135\sum_{cyc}uv$

សមមូល $\displaystyle\sum_{cyc}u^2\geq\sum_{cyc}uv$

សមមូល $\frac{1}{5}\sum_{cyc}(u-v)^2 \geq 0$ ពិត

ដូច្នេះ

$$\frac{a^5+2b^5+4c^5+7}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{4a^5+b^5+2c^5+7}{bc(\sqrt{b}+\sqrt{c})}+\frac{2a^5+4b^5+c^5+7}{ca(\sqrt{c}+\sqrt{a})} \geq 21$$

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2\sin A+b^2\sin B+c^2\sin C\ge 6S$?

(**S** តាងឲ្យក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ **ABC**)

ដំណោះស្រាយ

តាង $T=a^2\sin A+b^2\sin B+c^2\sin C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin C \\ c=2R\sin C \end{cases}$ ដែល **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកណ។

គេបាន $T=4R^2(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C)$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន

$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C\ge 3\sin A\sin B\sin C$

គេបាន $T\ge 12R^2\sin A\sin B\sin C$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $S=\frac{abc}{4R}$ ដោយ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin C \\ c=2R\sin C \end{cases}$

គេបាន $S=\frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

ហេតុនេះ $T\geq 6\times 2R^2\sin A\sin B\sin C=6S$ ពិត

ដូចនេះ $a^2\sin A+b^2\sin B+c^2\sin C\geq 6S$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ស្រាយថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{27}{2}.\frac{(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6}\geq 2$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$

តាម Lemma Cauchy-Schwarz គេបាន ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

យើងនិងស្រាយថា $\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{27}{2}\frac{(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6}\geq 2$

តាង $t=\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geq 3$ គេបាន ៖

$\frac{t}{2}+\frac{27}{2t^3}\geq 2\Leftrightarrow\frac{t^4-4t^3+27}{2t^3}=\frac{(t-3)^2(t^2+2t+3)}{2t^3}\geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{27}{2}.\frac{(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6}\geq 2$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 4 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $T=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}=\sum_{cyc}\frac{a}{b+c-a}$

ដោយ a,b,c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណនោះ $\begin{cases} b+c-a>0 \\ c+a-b>0 \\ c+a-b>0 \end{cases}$

តាម Lemma Cauchy-Schwarz :

$$T=\sum_{cyc}\frac{a^2}{ab+ac-a^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}$$

ដោយ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

នោះ $ab+bc+ca\geq 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)>0$

គេទាញ $\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

ហេតុនេះ $T \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} = 2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

នាំឲ្យ $T + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 4$

ព្រោះ $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 2$ (តាមវិសមភាព AM-GM)

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 4$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}}+\frac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}}+\frac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}}\geq 3\sqrt{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $(b+c)^2=(b^2+c^2)+2bc\geq 2\sqrt{2bc(b^2+c^2)}$

គេទាញ $\dfrac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}}\geq 2\sqrt{2}.\dfrac{a}{b+c}$

នាំឲ្យ $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}}\geq 2\sqrt{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq 3\sqrt{2}$

ព្រោះ $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$ (មើលលំហាត់ទី២) ។

ដូចនេះ $\dfrac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}}+\dfrac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}}+\dfrac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}}\geq 3\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី១២ (**Spain Mathematical Olympiad 2011**)

គេឲ្យ **a,b,c** ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន ៖

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{a(b+c)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 3$$

ឬ $$\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{3}{2}$$

គេទាញ $$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}$$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=1$ ចូរស្រាយថា៖

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\le\frac{9}{10}$$ ។

២-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែល $ab+bc+ca=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c}\ge 2$$

៣-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c+a^2}}\le\frac{3}{2}$$

៤-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

៥-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{2}{3}(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]$$

៦-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{5a+2b+c}+\frac{b}{a+5b+2c}+\frac{c}{2a+b+5c}\le\frac{3}{8}$$

៧-គេឲ្យ $x,y,z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{x(y+z)^2}{3x+2y+2z}+\frac{y(z+x)^2}{2x+3y+2z}+\frac{z(x+y)^2}{2x+2y+3z}\ge\frac{4}{7}\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

៨-គេឲ្យ $x,y,z>0$ ដែល $x^2+y^2+z^2=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$(x+y+z)\left(\frac{x+y}{1+xy}+\frac{y+z}{1+yz}+\frac{z+x}{1+zx}\right)\le\frac{9}{2}$$

៩-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\ge 3\sqrt{2}$$

១០-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=x^3$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{1+a+bc}+\frac{b}{1+b+ca}+\frac{c}{1+c+ab}\ge\frac{3x}{1+x+x^2}$$

១១-គេឲ្យ $x,y,z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq 2$$

១២-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a(b+c)^2}{\sqrt{b^4-b^2c^2+c^4}}+\frac{b(c+a)^2}{\sqrt{c^4-c^2a^2+a^4}}+\frac{c(a+b)^2}{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}\leq 4(a+b+c)$$

១៣-គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2+\left(\frac{b}{1+bc}\right)^2+\left(\frac{c}{1+ca}\right)^2\geq\frac{3}{4}$$

(**Spain Mathematical Olympiad 2009**)

១៤-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\geq\frac{15}{8}$$

(**Spain Mathematical Olympiad 2010**)

ជំពូកទី២

សមីការអនុគមន៍

លំហាត់

១-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយដឹងថា ៖

$f(\frac{x+1}{x})=1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq 0$ ។

២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

៣-ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ដោយដឹងថា ៖

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x \\ f(x+1)+x.g(2x+3)=2x^2+x \end{cases}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

៤-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x+y)=x+f(y)$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ ។

៥-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x+y)-f(x-y)=4xy}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

៦-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x)f(y)=f(xy)+x+y}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

៧-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : Q^+ \to Q^+}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x+\frac{y}{x})=f(x)+\frac{f(y)}{f(x)}+2y}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x, y \in Q^+}$ ។

៨-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(xf(y)+x)=xy+f(x)}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ។

៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$\mathbf{f(x) \le x}$ និង $\mathbf{f(x+y) \le f(x)+f(y)}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួពិត $\mathbf{x, y}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{f(x)=x}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ ។

១០-គេតាង $\mathbf{Q^+}$ ជាសំណុំនៃចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន ។

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : Q^+ \to Q^+}$ បើគេដឹងថា

$\mathbf{f(x+1) = f(x) + 1}$ និង $\mathbf{f(x^3) = f^3(x)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x \in Q^+}$ ។

១១-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

១២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x^2 + f(y)) = y + xf(x)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយដឹងថា ៖

$f(\frac{x+1}{x})=1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(\frac{x+1}{x})=1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$ (1)

តាង $t=\frac{x+1}{x}$ នាំឲ្យ $x=\frac{1}{t-1}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$f(t)=1+2(t-1)+4(t-1)^2=4t^2-6t+3$$

ដូចនេះ $f(x)=4x^2-6x+3$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ (1)

ជំនួស x ដោយ $1-x$ ក្នុង (1) គេបាន ៖

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \ (2)$$

តាម (1) គេទាញ $f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$ (3)

យក (3) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$(1-x)^2(2x - x^4) - x^2(1-x)^2 f(x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$$

បន្ទាប់ពីគណនាមកគេទទួលបាន $f(x) = 1 - x^2$ ។

លំហាត់ទី៣

ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ដោយដឹងថា ៖

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x \\ f(x+1)+x.g(2x+3)=2x^2+x \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

$$\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x & (1) \\ f(x+1)+x.g(2x+3)=2x^2+x & (2) \end{cases}$$

-យក $3x-1=t$ ឬ $x=\dfrac{t+1}{3}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$f(t)+g(2t+1)=t+1 \quad (3)$$

-យក $x+1=t$ ឬ $x=t-1$ ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$f(t)+(t-1)g(2t+1)=2t^2-3t+1 \quad (4)$$

-ដកសមីការ (4) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$(t-2)g(2t+1)=2t^2-4t=2t(t-2)$$

នាំឲ្យ $g(2t+1)=2t$ ដែល $t\neq 2$

ដូចនេះ $g(x)=x-1$ ។

តាម (3) គេទាញ $f(t)=t+1-g(2t+1)=t+1-2t=-t+1$ ។

ដូចនេះ $f(x)=-x+1$ ។

-ម្យ៉ាងទៀតចំពោះ $x=1$ សមីការ (1) និង (2) ក្លាយជា ៖

$f(2)+g(5)=3$ នាំឲ្យ $f(2)=a\ ,\ g(5)=3-a\quad (a\in IR)$

សរុបមកគេបានចម្លើយ $f(x)=-x+1\ ,\ g(x)=x-1$

និង $f(2)=a\ ,\ g(5)=3-a\quad (a\in IR)$ ។

លំហាត់ទី៤

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f:IR\to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x+y)=x+f(y)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x,y\in IR}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ $\mathbf{f}$

គេមាន $\mathbf{f(x+y)=x+f(y)\ (1)}$

ជំនួស $\mathbf{x=u,y=v}$ ក្នុង (1)គេបាន $\mathbf{f(u+v)=u+f(v)\ (2)}$

ជំនួស $\mathbf{x=v,y=u}$ ក្នុង (1) គេបាន $\mathbf{f(v+u)=v+f(u)\ (3)}$

ផ្ទឹម (2) និង (3) គេទទួលបាន $\mathbf{u+f(v)=v+f(u)}$

គេទាញ $\mathbf{f(u)-u=f(v)-v}$ នាំឲ្យ $\mathbf{f(x)-x}$ ជាអនុគមន៍ថេរ

គេបាន $\mathbf{f(x)-x=c}$ ឬ $\mathbf{f(x)=x+c}$

ដូចនេះ $\mathbf{f(x)=x+c}$ គ្រប់ចំនួនថេរ $\mathbf{c}$ ។

លំហាត់ទី៥

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x+y)-f(x-y)=4xy$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f

គេមាន $f(x+y)-f(x-y)=4xy$ (1)

តាង $x+y=u$ និង $x-y=v$ នោះ $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$

ទំនាក់ទំនង(1)ក្លាយជា $f(u)-f(v)=u^2-v^2$

គេទាញ $f(u)-u^2=f(v)-v^2$

នាំឲ្យ $f(x)-x^2$ ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ $x\in IR$

គេបាន $f(x)-x^2=c$ ឬ $f(x)=x^2+c$

ដូចនេះ $f(x)=x^2+c$ គ្រប់ចំនួនថេរ c ។

លំហាត់ទី៦

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$ (1)

យក $x = y = 0$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f^2(0) = f(0)$

នាំឲ្យ $f(0) = 0$ ឬ $f(0) = 1$ ។

យក $y = 0$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f(x).f(0) = f(0) + x$

-ចំពោះ $f(0) = 0$ គេបាន $f(x) \times 0 = x$ (មិនអាច)

-ចំពោះ $f(0) = 1$ គេបាន $f(x) = 1 + x$

-យក $f(x) = x + 1$ ជួស (1)$: (x+1)(y+1) = (xy+1) + x + y$ **ពិត**

ដូចនេះ $f(x) = x + 1$ ។

លំហាត់ទី៧

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : Q^+ \to Q^+}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x+\frac{y}{x}) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x, y \in Q^+}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ $\mathbf{f}$

គេមាន $\mathbf{f(x+\frac{y}{x}) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y \quad (*)}$

យក $\mathbf{(x, y) = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}}$ ជំនួសក្នុង $\mathbf{(*)}$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} f(2) = f(1) + 3 \\ f(3) = f(1) + \dfrac{f(2)}{f(1)} + 4 \\ f(3) = f(2) + 5 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $\mathbf{f(1) = 1}$, $\mathbf{f(2) = 4}$, $\mathbf{f(3) = 9}$

តាមលទ្ធផលនេះយើងឧបមាថា $\mathbf{f(n) = n^2}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN}$

យើងនឹងស្រាយថា $\mathbf{f(n+1) = (n+1)^2}$ ។

យក $x=y=n$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន $f(n+1)=f(n)+1+2n$

ដោយ $f(n)=n^2$ គេបាន $f(n+1)=n^2+1+2n=(n+1)^2$ ពិត។

យើងនឹងស្រាយថា $f(x)=x^2\ \forall x\in Q^+$ ជាចម្លើយតែមួយគត់របស់

សមីការ ។

-យក $x=n, y=m$ គ្រប់ $m,n\in IN$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(n+\frac{m}{n})=f(n)+\frac{f(m)}{f(n)}+2m=n^2+\frac{m^2}{n^2}+2m\ (1)$$

-យក $x=\frac{m}{n}, y=m$ គ្រប់ $m,n\in IN$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(\frac{m}{n}+n)=f(\frac{m}{n})+\frac{f(m)}{f(\frac{m}{n})}+2m=f(\frac{m}{n})+\frac{m^2}{f(\frac{m}{n})}+2m\ \ (2)$$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$f(\frac{m}{n})+\frac{m^2}{f(\frac{m}{n})}=n^2+\frac{m^2}{n^2}\quad \text{ឬ}\ [f(\frac{m}{n})-\frac{m^2}{n^2}][1-\frac{n^2}{f(\frac{m}{n})}]=0\,(**)$$

តាង $\frac{p}{q} \in Q^+$ ដែល $p \in IN$ និង $q \in IN$ ។

-បើ $1 - \frac{q^2}{f(\frac{p}{q})} \neq 0$ នោះតាម (**) យក $m = p , n = q$ គេទាញបាន

$$f(\frac{p}{q}) = \frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$ ។

ដូចនេះ $f(x) = x^2 \ , \forall x \in Q^+$ ។

-បើ $1 - \frac{q^2}{f(\frac{p}{q})} = 0$ នោះ $\frac{f(2q)}{f(\frac{2p}{2q})} = \frac{4q^2}{f(\frac{p}{q})} \neq \frac{q^2}{f(\frac{p}{q})} = 1$

តាម (**) យក $m = 2p , n = 2q$ គេទាញបាន

$$f(\frac{p}{q}) = f(\frac{2p}{2q}) = \frac{(2p)^2}{(2q)^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

ដូចនេះ $f(x) = x^2 \ , \forall x \in Q^+$ ជាចម្លើយតែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់។

លំហាត់ទី៨

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: IR \to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(xf(y)+x) = xy + f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f :

គេមាន $f(xf(y)+x) = xy + f(x) \ (*)$

-យក $x = 1$, $y = -1 - f(1)$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(f(-1-f(-1))+1) = -1 - f(1) + f(1) = -1$$

តាង $a = f(-1-f(-1))+1$ នោះ $f(a) = -1$

-យក $y = a$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$f(xf(a)+x) = ax + f(x)$ ដោយ $f(a) = -1$

$f(-x+x) = ax + f(x)$ ឬ $f(x) = -ax + b$ ដែល $b = f(0)$

យក $f(x) = -ax + b$ ជំនួសក្នុងសមីការ (*) គេបាន ៖

$$a^2xy - abx - ax + b = xy - ax + b$$

គេទាញ $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases}$

ដូចនេះ $f(x) = x$ ឬ $f(x) = -x$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(x)\le x$ និង $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួពិត x,y ។

ចូរស្រាយថា $f(x)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f(x)=x$

-ចំពោះ $x=0,y=0$ គេបាន $f(0)\le 0$ និង $f(0+0)\le f(0)+f(0)$

ឬ $f(0)\ge 0$ នាំឲ្យ $f(0)=0$ ។

-ជំនួស $y=-x$ គេបាន $f(x-x)\le f(x)+f(-x)$ ឬ $f(x)+f(-x)\ge 0$

តែគេមាន $f(x)\le x$ នោះ $f(x)+f(-x)\le x-x=0$

គេទាញបាន $f(x)+f(-x)=0$ ឬ $f(x)=-f(-x)$ ចំពោះ $x\in IR$

ដោយ $f(-x)\le -x$ នោះ $x\le -f(-x)=f(x)$ និង $f(x)\le x$

ដូចនេះ $f(x)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតx ។

លំហាត់ទី១០

គេតាង Q^+ ជាសំណុំនៃចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន ។

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : Q^+ \to Q^+$ បើគេដឹងថា $f(x+1) = f(x)+1$

និង $f(x^3) = f^3(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in Q^+$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f :

តាមសមភាព $f(x+1) = f(x)+1$ គេទាញបាន $f(x+n) = f(x)+n$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

តាង $\frac{p}{q} \in Q^+$ ដែល $p, q \in IN$ ហើយយក $t = f(\frac{p}{q})$

ជំនួស $x = \frac{p}{q} + q^2$ ក្នុងសមភាព $f(x^3) = f^3(x)$ គេបាន ៖

$$f[(\frac{p}{q}+q^2)^3] = \left[f(\frac{p}{q}+q^2) \right]^3 = \left[f(\frac{p}{q}) + q^2 \right]^3$$
$$= (t+q^2)^3 = t^3 + 3t^2q^2 + 3tq^4 + q^6 \ (1)$$

ដោយគេមាន ៖

$$f[(\frac{p}{q}+q^2)^3]=f(\frac{p^3}{q^3}+3p^2+3pq^3+q^6)$$
$$=f(\frac{p^3}{q^3})+3p^2+3pq^3+q^6$$
$$=f^3(\frac{p}{q})+3p^2+3pq^3+q^6$$
$$=t^3+3p^2+3pq^3+q^6 \quad (2)$$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបានសមីការ ៖

$$3t^2q^2+3tq^4=3p^2+3pq^3$$
$$t^2q^2+tq^4=p^2+pq^3$$
$$(t^2q^2-p^2)+(tq^4-pq^3)=0$$
$$(tq-p)(tq+p)+q^3(tq-p)=0$$
$$(tq-p)(tq+p+q^3)=0$$

គេទាញឫស $t=\frac{p}{q}$ ឬ $t=-\frac{p+q^3}{q}$ តែ $t\in Q^+$

ដូចនេះសមីការមានឫសតែមួយគឺ $t=\frac{p}{q}$ ហើយដោយ $t=f(\frac{p}{q})$

ដូចនេះ $f(x)=x\ ,\ \forall x\in Q^+$ ។

លំហាត់ទី១១

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f :

គេមាន $f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy \quad (1)$

-យក $y = 0$ ជួសក្នុង (1)គេបាន $f(f(x)) = (1+f(0))f(x) \ (2)$

-ជំនួស x ដោយ $x+y$ ក្នុង (2) គេបាន ៖

$f(f(x+y)) = (1+f(0))f(x+y) \ (3)$

ផ្ទឹម (1) និង (3) គេបាន

$(1+f(0))f(x+y) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$

ឬ $f(0)f(x+y) = f(x)f(y) - xy \quad (4)$

-យក $y = 1$ ជួសក្នុង (4) គេបាន $f(0)f(x+1) = f(x)f(1) - x \quad (5)$

-យក $y=-1$ ក្នុង (4) គេបាន $f(0)f(x-1)=f(x)f(-1)+x$

នាំឲ្យ $f(0)f(x)=f(x+1)f(-1)+x+1$ (6)

តាម (5) និង (6) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} f(0)f(x+1)-f(x)f(1)=-x \\ f(-1)f(x+1)-f(0)f(x)=-x-1 \end{cases}$

ដោះស្រាយបំបាត់ $f(x+1)$ គេបានសមីការ ៖

$[f^2(0)-f(1)f(-1)]f(x)=[f(0)-f(-1)]x+f(0)$ (7)

បើ $f^2(0)-f(1)f(-1)=0$ យក $x=0$ ជួសក្នុង (7) គេបាន $f(0)=0$

ហើយតាម (4) គេបាន $f(x)f(y)=xy$ នោះ $f(x)f(1)=x$ គ្រប់ $x\in IR$

ហេតុនេះចំពោះ $x=-1$ គេបាន $f(-1)f(1)=-1$

ប៉ុន្តែ $f^2(0)-f(1)f(-1)=1\neq 0$ វាផ្ទុយពីការឧបមាខាងលើដែលឲ្យ $f^2(0)-f(1)f(-1)=0$ ។

ហេតុនេះតម្លៃ $f^2(0)-f(-1)f(1)$ មិនអាចស្មើសូន្យទេ ។

តាម (7) គេទាញបាន $f(x)=ax+b$

ដែល $a=\dfrac{f(0)-f(-1)}{f^2(0)-f(-1)f(1)}$ និង $b=\dfrac{f(0)}{f^2(0)-f(-1)f(1)}$ ។

ជំនួស $f(x)=ax+b$ ក្នុងសមីការដើម (1) គេបាន ៖

$$f(a(x+y)+b)=a(x+y)+b+(ax+b)(ay+b)-xy$$
$$a[a(x+y)+b]+b=a(x+y)+b+(ax+b)(ay+b)-xy$$
$$a^2x+a^2y+ab+b=ax+ay+b+a^2xy+abx+aby+b^2-xy$$
$$a^2x+a^2y+ab=(a^2-1)xy+(a+ab)x+(a+ab)y+b^2$$

គេទាញ $\begin{cases} a^2-1=0 \\ a^2=a+ab \\ ab=b^2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=1$, $b=0$

ដូចនេះ $f(x)=x$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

លំហាត់ទី១២

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x^2+f(y)) = y + xf(x)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ $\mathbf{f}$:

គេមាន $\mathbf{f(x^2+f(y)) = y + xf(x)}$ **(*)**

យក $\mathbf{x = 0}$ គេបាន $\mathbf{f(f(y)) = y}$ **(1)** គ្រប់ $\mathbf{y \in IR}$

ជំនួស $\mathbf{y}$ ដោយ $\mathbf{x^2+f(y)}$ ក្នុង **(1)** គេបាន ៖

$\mathbf{f(f(x^2+f(y))) = x^2+f(y)}$ **(2)**

តាម **(*)** និង (2) គេទាញបាន $\mathbf{f(y+xf(x)) = x^2+f(y)}$ **(3)**

ជំនួស $\mathbf{x}$ ដោយ $\mathbf{f(x)}$ ក្នុង **(3)** គេបាន ៖

$\mathbf{f(y+f(x)f(f(x))) = f^2(x)+f(y)}$

$\mathbf{f(y+xf(x)) = f^2(x)+f(y)}$ **(4)** (**ព្រោះ** $\mathbf{f(f(x)) = x}$)

តាម (3) និង (4) គេទាញបាន $\mathbf{f^2(x) = x^2}$ **(5)**

ជំនួស y ដោយ f(y) ក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(x^2+f(f(y)))=f(y)+xf(x)$$
$$f(x^2+y)=f(y)+xf(x)$$
$$\left(f(x^2+y)\right)^2=\left(f(y)+xf(x)\right)^2$$
$$(x^2+y)^2=f^2(y)+2xf(x)f(y)+x^2f^2(x)$$
$$x^4+2x^2y+y^2=y^2+2xf(x)f(y)+x^4$$
$$2x^2y=2xf(x)f(y)$$

គេទាញ $f(x)f(y)=xy$ (6)

តាម (5) គេបាន $f(x)=x$ ឬ $f(x)=-x$ ។

-បើ $f(x)=x$ នោះតាម (6) យើងបាន $f(y)=y\ \forall y\in IR$

ដូចនេះ $f(x)=x\ \forall x\in IR$ ។

-បើ $f(x)=-x$ នោះតាម (6) គេបាន $f(y)=-y\ \forall y\in IR$

ដូចនេះ $f(x)=x$ ឬ $f(x)=-x\ \forall x\in IR$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(x+y)f(f(x)-y)=xf(x)-yf(y)$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ ។

២-អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់គ្រប់ $x\neq 0;1$ ។

ចូរដោះស្រាយសមីការអនុគមន៍ $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x$

៣-ចូរកំណត់គ្រប់ចម្លើយនៃ $f(x+y)+f(x-y)=f(x)\cos y$

៤-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$

៥-គេមាន $f:IN\to IN$ ជាអនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n+1)>f[f(n)]$

ចំពោះគ្រប់ n ។

ចូរបង្ហាញថា $f(n)=n$ ចំពោះគ្រប់ n ។

៦-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ ។

៧-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$:

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$$ ។

៨-គេឲ្យ $f: IN\mapsto IN$ ដោយដឹងថា $f(n)+f(f(n))=6n$ គ្រប់ $n\in IN$

ចូរកំណត់ $f(n)$ ។

៩-កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: Q^+\mapsto Q^+$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x+1)=f(x)+1$ និង $f(x^2)=f^2(x)$ គ្រប់ $x\in Q^+$ ។

១០-កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$x\,f(x)+f(1-x)=x^3-x$ គ្រប់ $x\in IR$

១១-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(x.f(x)+f(y))=f^2(x)+y$ គ្រប់ $x,y\in IR$

១២-កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: Q^+\mapsto Q^+$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x\,f(y))=\dfrac{f(x)}{y}$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in Q^+$

១៣-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$f(x^2+f(y))=y+f^2(x)$$ (IMO 1992)

១៤-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+xf(y)+f(x)-1$$ គ្រប់ $x,y\in IR$

(IMO 1999)

១៥-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$(f(x)+f(y))(f(u)+f(v))=f(xu-yv)+f(xv+yu)$$

(IMO 2002)

១៦-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\mapsto IR$ ដោយដឹងថា ៖

$$f(x\,f(x+y))=f(y\,f(x))+x^2$$ គ្រប់ $x,y\in IR$

(IMO 2009 Shortlist)

១៧-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR^+\mapsto IR^+$ ដោយដឹងថា ៖

$f(xf(y))=y\,f(x)$ គ្រប់ $x,y\in IR^+$ និង $x\to\infty:\ f(x)\to 0$ ។

(IMO 1993)

១៨-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\mapsto IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)$ គ្រប់ $x,y\in IR$ ។

១៩-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\mapsto IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(xf(y)+f(x))=2f(x)+xy$ គ្រប់ $x,y\in IR$ ។

២០-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\mapsto IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4y\,f(x)$ គ្រប់ $x,y\in IR$ ។

២១-គេមានអនុគមន៍ $f:IR\mapsto IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x^3+y^3)=(x+y)[f^2(x)-f(x)f(y)+f^2(y)]$ គ្រប់ $x,y\in IR$

ចូរស្រាយថា $f(1996x)=1996f(x)$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

២២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\mapsto[0,+\infty)$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x^2+y^2)=f(x^2-y^2)+f(2xy)$ គ្រប់ $x,y\in IR$ ។

២៣-អនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $f(1)=1$ និង

$\forall n>1: f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2f(n)$ ។ ចូរកំណត់ $f(2002)$

ជំពូកទី៣

ទ្រឹស្តីចំនួន

លំហាត់

១-(APMO 2011) គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថាចំនួនបី $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ មិនអាចជាការេប្រាកដទាំងអស់ ។

២-(Eötvös Competition 1899)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$

ចែកដាច់នឹង 1897 ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

៣-(IMO 1986) គេតាង d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសពី $2, 5$ ឬ 13

ចូរបង្ហាញថាគេអាចរកតម្លៃខុសគ្នា a,b មួយនៅក្នុងសំណុំ

$\{2,5,13,d\}$ ដែល $ab-1$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

៤-(IMO 1998)

ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y

ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

៥-(IMO 2003)

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន $(a\,,b\,)$ បើគេដឹងថាចំនួន

$\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ ជាចំនួនគត់ វិជ្ជមានដែរ ។

៦-(IMO 1961)

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់ $m\,,\,n\geq 3$ បើគេដឹងថាចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a គេមាន $\dfrac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$ ជាចំនួនគត់ ។

៧-(IMO 1997)

គេឱ្យពីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។ ពេលដែល a^2+b^2 ចែកនឹង

$a+b$ នោះគេបានផលចែក q និងសំណល់ r ។

ចូរកំណត់គ្រប់គូ $(a\,,b)$ ដោយដឹងថា $q^2+r=1977$ ។

៨-(IMO 1960)

គេឱ្យ $\mathbf{N}$ ជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ ។

គេដឹងថា $\mathbf{N}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{11}$ ហើយ $\mathbf{N}$ ចែកនឹង $\mathbf{11}$ បានផលចែក

ស្មើនឹងផលបូកការេនៃលេខខ្ទង់របស់ $\mathbf{N}$ ។

ចូរកំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ $\mathbf{N}$?

៩-(IMO 1978)

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ដែល $\mathbf{1 \le m < n}$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\mathbf{m+n}$ ដើម្បីឱ្យចំនួន $\mathbf{1978^m}$ និង $\mathbf{1978^n}$ មានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយបំផុតដូចគ្នា?

១០-(IMO 1962)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត $\mathbf{n}$ ដោយដឹងថា ក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់ $\mathbf{n}$ មានលេខ $\mathbf{6}$ ជាលេខចុងក្រោយបំផុត ។ បើគេលុបលេខ $\mathbf{6}$ ចុងក្រោយនោះចោលហើយយកទៅសរសេរ

ពីខាងមុខនៃលេខដែលនៅសល់នោះគេបានចំនួនមួយទៀតស្មើនឹង 4 ដងនៃចំនួនដើម n ។

១១-(IMO 1967)

គេឱ្យ k , m , n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដោយដឹងថា $m+k+1$ ជាចំនួនបឋមធំជាង $n+1$ ។ គេយក $c_s = s(s+1)$ ។

ចូរស្រាយថាផលគុណ៖

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)(c_{m+3}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$$

ចែកដាច់នឹងផលគុណ $c_1.c_2.c_3...c_n$ ។

១២-(IMO 2005)

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1 , a_2 , a_3 , ...$ កំណត់ដោយ $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត ។

១៣-(IMO Shortlist 2003)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{k}$ តូចជាងគេ ដោយដឹងថាមានចំនួនគត់

$\mathbf{x_1, x_2, x_3, ..., x_k}$ ដែល $\mathbf{x_1^{\,3} + x_2^{\,3} + ... + x_k^{\,3} = 2002^{2002}}$ ។

១៤-(IMO 1976)

គេឱ្យស្វ៊ីត $\mathbf{(u_n)}$ កំណត់ដោយៈ

$\mathbf{u_0 = 2\ ,\ u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^{\ 2} - 2) - u_1}$ ចំពោះ $\mathbf{n = 1, 2, ...}$

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ គេមាន $\mathbf{\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}}$

(ដែល $\lfloor \mathbf{x} \rfloor$ តាងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង $\mathbf{x}$)

១៥-(IMO 2010)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f :\ IR \to IR}$ ដោយដឹងថាសមភាព

$\mathbf{f\left(\lfloor x \rfloor y\right) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor}$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

($\lfloor \mathbf{a} \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ $\mathbf{a}$) ។

១៦-(IMO 1984)

ចូរកំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b ដោយដឹងថា៖

$(i):\ ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

$(ii):\ (a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7 ។

១៧-(Russia 2001)

គេឱ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា ។

គេដឹងថា $ab(a+b)$ ចែកដាច់នឹង a^2+ab+b^2 ។

ចូរស្រាយថា $|a-b|>\sqrt[3]{a}$?

១៨-គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់។

ចូរស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ។

១៩-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ចំនួន $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{3^n n^3 + 1}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ។

២០-(IMO 1959)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{\dfrac{21n+4}{14n+3}}$

ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n}$ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

SOLUTION

រក្សាសិទ្ធិដោយ លឹម ផល្គុន

Tel: (017) 768 246

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១ (APMO 2011)

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថាចំនួនបី $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ មិនអាចជាការេប្រាកដទាំងអស់ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ

នោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c គេមាន $\begin{cases} a^2+b+c \ge (a+1)^2 \\ b^2+c+a \ge (b+1)^2 \\ c^2+a+b \ge (c+1)^2 \end{cases}$

បូកវិសមីការបីនេះអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c \ge (a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2$$
$$a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c \ge a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c+3$$

$$0 \ge 3 \text{ មិនពិត}$$

ដូចនេះបីចំនួន $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ មិនអាចជាការេប្រាកដទាំងអស់ ។

លំហាត់ទី២ (**Eötvös Competition 1899**)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$

ចែកដាច់នឹង **1897** ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **n** ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $1897 = 7 \times 271$ ដែល $GCD(7,271) = 1$ ។

គេមាន $2903^n - 803^n = (2903 - 803)q_1 = 7 \times 300q_1$

$$464^n - 261^n = (464 - 261)q_2 = 7 \times 29q_2$$

គេបាន $2903^n - 803^2 - 464^n + 261^n = 7(300q_1 - 29q_2)$

នាំឱ្យ $7 \mid 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ។

ម៉្យាងទៀត $2903^n - 464^n = (2903 - 464)q_3 = 271 \times 9q_3$

និង $803^n - 261^n = (803 - 261)q_4 = 271 \times 2q_4$

នាំឱ្យ $271 \mid 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ។

ដូចនេះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ។

លំហាត់ទី៣ (IMO 1986)

គេតាង $\mathbf{d}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសពី $\mathbf{2, 5}$ ឬ $\mathbf{13}$ ។

ចូរបង្ហាញថាគេអាចរកតម្លៃខុសគ្នា $\mathbf{a,b}$ មួយនៅក្នុងសំណុំ $\mathbf{\{2,5,13,d\}}$ ដែល $\mathbf{ab-1}$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $\mathbf{a,b}$ ជាតម្លៃខុសគ្នានៃ $\mathbf{\{2,5,13,d\}}$ នោះគេបាន៖

$$\mathbf{ab-1\in\{9,25,64\ ,2d-1,5d-1,13d-1\}}$$

ដើម្បីបង្ហាញថាមានតម្លៃ $\mathbf{a,b}$ ដែល $\mathbf{ab-1}$ មិនមែនជាការេប្រាកដ

នោះយើងត្រូវឧបមាថា $\mathbf{2d-1\ ,5d-1,13d-1}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដជាករណីមិនអាចមាន។

បើ $\mathbf{2d-1\ ,5d-1,13d-1}$ ជាការេប្រាកដនោះមានចំនួនគត់ $\mathbf{a\,,b\,,c}$ ដែល $\mathbf{2d-1=a^2\ ,\ 5d-1=b^2\ ,13d-1=c^2}$ ។

តាមសមីការ $\mathbf{2d-1=a^2}$ បញ្ជាក់ថា $\mathbf{a}$ គឺជាចំនួនសេស ។

យក $\mathbf{a=2x+1}$ គ្រប់ $\mathbf{x\in IN}$ ។

គេបាន $d=\frac{(2x+1)^2+1}{2}=2x(x+1)+1$

នោះ $d\equiv 1 \pmod 4$

ម៉្យាងទៀតដោយ $d=2x(x+1)+1$ ជាចំនួនសេសនោះ

តាមសមីការ $5d-1=b^2$ និង $13d-1=c^2$ គេបាន b និង c

សុទ្ធតែជាចំនួនគូ ។ តាង $b=2y$, $c=2z$ គេបាន

$(13d-1)-(5d-1)=c^2-b^2=4(z^2-y^2)$

គេទាញ $d=\frac{1}{2}(z^2-y^2)$ នោះអាចមាន z និង y ដែល

$d\equiv 0 \pmod 4$ ដោយ $d\equiv 1$ នោះមានន័យថាការឧបមា

ខាងលើមិនពិត ។

ដូចនេះគ្មានតម្លៃ d ដែលធ្វើឱ្យ $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$

សុទ្ធតែជាការេប្រាកដបានទេ ។

សរុបមកគេអាចរកតម្លៃខុសគ្នា a,b មួយនៅក្នុងសំណុំ $\{2,5,13,d\}$

ដែល $ab-1$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី៤ (IMO 1998)

ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y)

តាង $a=x^2y+x+y$ និង $b=xy^2+y+7$

បើ a ចែកដាច់នឹង b នោះគេបានដូចគ្នា $ay-bx$ ចែកដាច់នឹង b ។

គេមាន $ay-bx=y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7)=y^2-7x$

ដោយ $x\geq 1$ នោះ $xy^2\geq y^2$

នាំឱ្យ $y^2-7x\leq xy^2-7x<xy^2+y+7=b$ ។

ដូចនេះ y^2-7x ចែកដាច់នឹង b លុះត្រាតែ $y^2-7x\leq 0$ ។

ក. ករណីទី១ ៖ $y^2-7x=0$ នោះ $y^2=7x$

ដោយ y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះលុះត្រាតែ $x=7k^2$ ហើយ $y=7k$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។

ខ.ករណីទី២ $y^2-7x<0$ នោះ $7x-y^2>0$

ដោយពិនិត្យឃើញថា $7x-y^2<7x$ ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $7x-y^2$ ចែកដាច់នឹង $b=xy^2+y+7$ លុះត្រាតែ

$7x>7x-y^2\geq xy^2+y+7$

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $y^2<7$ នោះ $y=1$ ឬ $y=2$ ។

-ចំពោះ $y=1$ គេបាន $7x-y^2=7x-1$ ហើយ $b=x+8$

គេមាន $7x-1=7(x+8)-57$ ចែកដាច់នឹង $b=x+8$ លុះត្រាតែ

b ជាតួចែកនៃ 57 ។

ដោយ $b=x+8>8$ នោះ $b=19$ ឬ $b=57$

គេទាញបាន $x=11$ ឬ $x=49$ ។

ដូចនេះគេបាន $x=11\,,\,y=1$ ឬ $x=49\,,\,y=1$ ។

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $7x-y^2=7x-4$ ហើយ $b=4x+9$

ដោយ $GCD(4x+9;4)=1$ នោះ $7x-4$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$

សមមូល $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$ ។

គេមាន $4(7x-4)=7(4x+9)-79$ ។

ដោយ 79 ជាចំនួនបឋមនោះដើម្បីឱ្យ $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង

$4x+9$ លុះត្រាតែ $4x+9=79$ នោះ $x=\frac{35}{2}$ មិនមែនជាចំនួនគត់

ដូចនេះក្នុងករណី $y=2$ គ្មានចម្លើយ ។

សរុបមកគេបានគូចម្លើយ៖

$(x,y)\in\{\ (11,1\ ),(49,1\ )\ ,(7k^2,7k)\ \}\ ,k=1,2,...$

លំហាត់ទី៥ (IMO 2003)

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន **(a , b)** បើគេដឹងថាចំនួន

$\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ ជាចំនួនគត់ វិជ្ជមានដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន **(a , b)** ៖

យក $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}=k$ ដែល $k\in IN$

គេបាន $a^2-2kb^2a+k(b^3-1)=0 \quad (1)$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ $\Delta=4k^2b^4-4k(b^3-1)$

$$\Delta=(2kb^2-b)^2+4k-b^2$$

សមីការ **(1)** មានចម្លើយក្នុង **IN** លុះត្រាតែ Δ ជាការេប្រាកដ

មានន័យថា $\Delta=(2kb^2-b)^2+4k-b^2=d^2$

ដែល **d** ជាចំនួនគត់។

-បើ $4k-b^2=0$ ឬ $k=\dfrac{b^2}{4}$

យើងទទួលបាន $a=2b^2k-\dfrac{b}{2}=\dfrac{b^3-b}{2}$ ឬ $a=\dfrac{b}{2}$

ដោយ a , b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហេតុនេះគេត្រូវឲ្យ ៖

$b=2p \quad , \forall p\in IN$

គេទាញ $a=2(2p)^2\dfrac{(2p)^2}{4}-p=8p^4-p$

ហើយ $a=\dfrac{2p}{2}=p$ ។

ដូចនេះ $(a , b)=(8p^4-p , 2p) ; (p , 2p) ,\forall p\in IN$

-បើ $4k-b^2>0$

គេបាន $(2b^2k-b)^2+4k-b^2=d^2\geq(2b^2k-b+1)^2 , \forall k\in IN$

ឬ $4k(b^2-1)+(b-1)^2\leq 0$ គេទាញបាន $b=1$

ក្នុងករណីសមីការ (1) ក្លាយជា $a^2-2ka=0$ នាំឲ្យ $a=2k$

ដូចនេះ $(a , b)=(2k , 1)$ ចំពោះគ្រប់ $k\in IN$ ។

-បើ $4k-b^2<0$

គេបាន $(2b^2k-b)^2+4k-b^2=d^2<(2b^2k-b-1)^2$

សមមូល $(2b^2k-b)^2+4k-b^2-(2b^2k-b-1)^2<0$

ឬ $b^2(4k-3)+2b(b-1)+(4k-1)<0$ (មិនពិតក្នុង IN)

សរុបមកគេបានគូចម្លើយបីមានរាងដូចខាងក្រោម ៖

$(a, b) = (2k, 1) ; (k, 2k) ; (8k^4-k, 2k)$

ដែល $k \in IN$ ។

លំហាត់ទី៦ (IMO 1961)

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់ $\mathbf{m}\ ,\ \mathbf{n}\geq 3$ បើគេដឹងថាចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{a}$ គេមាន $\dfrac{\mathbf{a^m+a-1}}{\mathbf{a^n+a^2-1}}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{(m,n)}$ ៖

ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{\mathbf{a^m+a-1}}{\mathbf{a^n+a^2-1}}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $\mathbf{a^n+a^2-1}$

ជាកត្តារួមនៃ $\mathbf{a^m+a-1}$ ហើយ $\mathbf{m>n}$ ។

យើងយក $\mathbf{m=n+k}\ ,\ \mathbf{k\in IN}$

$$\begin{aligned}\mathbf{a^m+a-1} &= \mathbf{a^{n+k}+a-1}\\ &= \mathbf{a^k(a^n+a^2-1)+(1-a)(a^{k+1}+a^k-1)}\end{aligned}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះដើម្បីឲ្យ $\mathbf{a^n+a^2-1}$ ជាកត្តារួមនៃ $\mathbf{a^m+a-1}$

លុះត្រាតែ $\mathbf{n=k+1}$ និង $\mathbf{k=2}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{(m\ ,n\ )=(\ 5\ ,\ 3\ )}$ ។

លំហាត់ទី៧ (IMO 1997)

គេឱ្យពីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។ ពេលដែល a^2+b^2 ចែកនឹង $a+b$ នោះគេបានផលចែក q និងសំណល់ r ។

ចូរកំណត់គ្រប់គូ $(a\,,b)$ ដោយដឹងថា $q^2+r=1977$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូ $(a\,,b)$

តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីតគេអាចសរសេរ $a^2+b^2=(a+b)q+r$ (*)

ដែល $0\le r\le a+b-1$ ។

គេមាន $r\le a+b-1$ នោះ $q^2+r\le q^2+a+b-1$

ឬ $q^2+a+b-1\ge 1977$

ឬ $q^2+a+b\ge 1978$ (**)

គេមាន $r\ge 0$ នោះ $a^2+b^2=(a+b)q+r\ge (a+b)q$

តាមវិសមភាព $a^2+b^2\ge \dfrac{(a+b)^2}{2}$

គេបាន $(a+b)q \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ ឬ $a+b \leq 2q$

តាមវិសមភាព $(**)$ គេអាចសរសេរ $q^2 + 2q \geq 1978$

ឬ $(q+1)^2 \geq 1979 = 44^2 + 43$

គេទាញ $q+1 \geq 45$ ឬ $q \geq 44$

ម៉្យាងទៀត $q^2 \leq q^2 + r = 1977 = 44^2 + 43$

គេទាញបាន $q \leq 44$ ។ពីលទ្ធផលខាងលើនេះគេទាញបាន៖

$q = 44$ ហើយ $r = 1977 - 44^2 = 41$

សមីការ $(*)$ អាចសរសេរ $a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$

ឬ $(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009$

តាង $u = |a-22|$ និង $v = |b-22|$ ដែល $u\,,\,v \in IN$

គេបានសមីការ $u^2 + v^2 = 1009$ ។ យើងដឹងថាគ្រប់ការេនៃ

ចំនួនគត់មានលេខចុងក្រោយ$\{0,1,4,9,5,6\}$ ។

ហេតុនេះផលបូកការេនៃពីចំនួនគត់ដែលមានលេខចុងក្រោយស្មើ 9 លុះត្រាតែលេខចុងក្រោយនៃការេចំនួននីមួយស្មើរៀងគ្នា 4 និង 5

ឬ 5 និង 4 ឬ 0 និង 9 ឬ 9 និង 0 ។

ពីសមីការ $u^2+v^2=1009=31^2+48$ គេទាញបាន $0\le u\le 31$

ឧបមាថា $u\ge v$ នោះ $2u^2\ge u^2+v^2=1009$

គេទាញ $u^2\ge \frac{1009}{2}=22^2+\frac{41}{2}$ ឬ $u\ge 23$

ហេតុនេះ $23\le u\le 31$ ។

ដោយ u^2 ត្រូវមានលេខចុងក្រោយ $\{0\ ,4\ ,5\ ,9\}$

នោះគេអាចជ្រើសរើសតម្លៃ u ជាដំបូងដូចខាងក្រោម៖

$u\in\{30,28,25,23,27\}$

ដោយ $u^2+v^2=1009$ នោះ $v^2=\sqrt{1009-u^2}$

-បើ $u=30$ នោះ $v=\sqrt{1009-900}=\sqrt{109}$ មិនយក

-បើ $u=28$ នោះ $v=\sqrt{1009-784}=15$ យក

-បើ $u=25$ នោះ $v=\sqrt{1009-6225}=\sqrt{384}$ មិនយក

-បើ $u=23$ នោះ $v=\sqrt{1009-529}=\sqrt{480}$ មិនយក

-បើ $u=27$ នោះ $v=\sqrt{1009-729}=\sqrt{280}$ មិនយក

ដោយ $u^2+v^2=1009$ ជាសមីការឆ្លុះហេតុនេះបើ (a,b) ជាចម្លើយ

របស់សមីការនោះ (b,a) ក៏ជាចម្លើយរបស់សមីការដែរ ។

គេទាញបានចម្លើយ $u=28\ ,\ v=15$ ឬ $u=15\ ,\ v=28$

-ករណី $u=28\ ,\ v=15$ គេបាន $\begin{cases}|a-22|=28\\|b-22|=15\end{cases}$

គេទាញបាន $a=50,b=37$ ឬ $a=50\ ,\ b=7$ ។

-ករណី $u=15\ ,\ v=28$ គេបាន $\begin{cases}|a-22|=15\\|b-22|=28\end{cases}$

$a=37,b=50$ ឬ $a=7\ ,\ b=50$ ។

ដូចនេះ $(a,b)=\{(50,37);(37,50);(7,50);(50,7)\}$ ។

លំហាត់ទី៨ (IMO 1960)

គេឱ្យ N ជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ ។

គេដឹងថា N ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ N ចែកនឹង 11 បានផលចែក

ស្មើនឹងផលបូកការេនៃលេខខ្ទង់របស់ N ។

ចូរកំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ N ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ N

តាង $\mathbf{N = \overline{abc} = 100a + 10b + c}$ $\mathbf{(1)}$

គេបាន $\mathbf{\frac{N}{11} = a^2 + b^2 + c^2}$ ឬ $\mathbf{N = 11(a^2 + b^2 + c^2)}$ $\mathbf{(2)}$

តាម $\mathbf{(1)}$ គេអាចសរសេរ $\mathbf{N = 11(9a + b) + a - b + c}$

ដើម្បីឱ្យ N ចែកដាច់នឹង 11 លុះត្រាតែ $\mathbf{a - b + c}$ ចែកដាច់នឹង 11

ដោយ $\mathbf{1 \le a \le 9}$ និង $\mathbf{0 \le b \le 9}$, $\mathbf{0 \le c \le 9}$

គេបាន $\mathbf{-8 \le a - b + c \le 18}$ ហេតុនេះ $\mathbf{a - b + c = 0}$

ឬ $a-b+c=11$ ។

-ករណី $a-b+c=0$ ឬ $b=a+c$

គេបាន $N=11(9a+b)=11(a^2+b^2+c^2)$

ឬ $9a+a+c=a^2+(a+c)^2+c^2$

ឬ $2a^2+2(c-5)a+2c^2-c=0\ (E_1)$

ឌីសគ្រីមីណង់សមីការ (E_1) គឺ $\Delta'_1=(c-5)^2-2(2c^2-c)$

ឬ $\Delta'_1=-3c^2-8c+25$ ។

សមីការ (E_1) មានឫសក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\Delta'_1\geq 0$ និង Δ'_1

ជាការេប្រាកដ ។ ដោយ $\Delta'_1<0$ ចំពោះ $c\geq 2$ នោះ $c=0$, $c=1$

ដោយ Δ'_1 ជាការេប្រាកដតែក្នុងករណី $c=0$ មួយគត់

ហេតុនេះសមីការ (E_1) ក្លាយជា $2a^2-10a=0$ គេទាញបាន

$a=5$ ហើយ $b=a+c=5+0=5$ ។

ដូចនេះ $a=5$, $b=5$, $c=0$ ហើយ $N=550$ ។

-ករណី $a-b+c=11$ ឬ $b=(a+c)-11$

គេបាន $N=11(9a+b+1)=11(a^2+b^2+c^2)$

$9a+a+c-11+1=a^2+(a+c-11)^2+c^2$

ឬ $2a^2+2(c-32)a+2c^2-23c+131=0$ (E_2)

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (E_2) គឺ៖

$\Delta'_2=(c-32)^2-2(2c^2-23c+131)$

$=-3c^2+14c-6$

សមីការ (E_2) មានឬសក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\Delta'_2\geq 0$ និង Δ'_1 ជាការេប្រាកដ ។

ដោយ $\Delta'_2<0$ ចំពោះគ្រប់ $c\geq 5$ នោះ $c=\{1,2,3,4\}$

ដោយ Δ'_2 ជាការេប្រាកដតែក្នុងករណី $c=3$ មួយគត់

ហេតុនេះសមីការ (E_1) ក្លាយជា $2a^2-26a+80=0$ គេទាញបាន

$a=5$; $a=8$ ។

- ចំពោះ $a = 5\ , c = 3$

នោះ $b = a + c - 11 = 8 - 11 = -3 < 0$ មិនយក ។

-ចំពោះ $a = 8\ , c = 3$ នោះ $b = 8 + 3 - 11 = 0$ ។

ដូចនេះ $a = 8\ , b = 0\ , c = 3$ ហើយ $N = 803$ ។

លំហាត់ទី៩ (IMO 1978)

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n ដែល $1 \le m < n$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $m+n$ ដើម្បីឱ្យចំនួន 1978^m និង 1978^n មានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយបំផុតដូចគ្នា?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $m+n$

ដើម្បីឱ្យចំនួន 1978^m និង 1978^n
មានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយបំផុតដូចគ្នាលុះត្រាតែផលសង
$d = 1978^n - 1978^m$ ចែកដាច់នឹង 1000 ។

គេមាន $d = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$ ចំពោះគ្រប់ $1 \le m < n$ ។

ដោយ $1000 = 8 \times 125$ ហើយ $1978 = 989 \times 2$ នោះដើម្បីឱ្យ

$d = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$ ចែកដាច់នឹង 1000 លុះត្រាតែ

1978^m ចែកដាច់នឹង 8 និង $1978^{n-m} - 1$ ចែកដាច់នឹង 125 ។

ចំនួន $1978^m = 989^m \times 2^m$ ចែកដាច់នឹង 8 លុះត្រាតែ $m \ge 3$

ហើយដោយ $1 \le m < n$ នោះគេទាញបាន $n > m \ge 3$ ។

គេមាន $1978 = 15 \times 125 + 103 = 125q_1 + 103$ ដែល $q_1 = 15$

ហើយ $1978^2 = (125q_1 + 103)^2 = 125q_2 + 103^2$

តែដោយ $103^2 = 84 \times 125 + 109$

នោះ $1978^2 = (q_2 + 84) \times 125 + 109$

ឬ $1978^2 = 125q_3 + 109$ ដែល $q_3 = (q_2 + 4) \in IN$

លើកជាការេ $1978^4 = (125q_3 + 109)^2$

$$\begin{aligned} &= 125q_4 + 109^2 \\ &= 125(q_4 + 95) + 6 \\ &= 125q_5 + 6 \; ; \; q_5 = (q_4 + 95) \in IN \end{aligned}$$

ហេតុនេះគ្រប់ $p \in IN$ គេបាន៖

$$1978^{4p} = (125q_5 + 6)^p = 125q_6 + 6^p$$

ដោយ $6^p = (1+5)^p = \sum_{k=0}^{p} C(p,k).5^k$

$$=1+5p+\frac{25p(p-1)}{2}+125\sum_{k=3}^{p}C(p,k)5^{k-3}$$

គេបាន $1978^{4p}=125q_7+1+5p+\frac{25p(p-1)}{2}$

ដែល $q_7=q_6+\sum_{k=3}^{p}C(o,k)5^{k-3}$ (ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)

គេទាញ $1978^{4p}-1=125q_7+\frac{5p(5p-3)}{2}$

ដើម្បីឱ្យ$1978^{n-m}-1$ ចែកដាច់នឹង 125 លុះត្រាតែ និងគ្រាន់តែឱ្យ

$n-m=4p\ ,p\in IN$ និង $\frac{5p(5p-3)}{2}$ ចែកដាច់នឹង 125

ដើម្បីឱ្យ $\frac{5p(5p-3)}{2}$ ចែកដាច់នឹង 125 លុះត្រាតែ p ជាពហុគុណនៃ 25 ពោលគឺ $p=25k\ ,\forall k\in IN$

ហើយដោយ $n-m=4p$ នោះ $n-m=100k$ និង $m\geq 3$

គេមាន $m+n=(n-m)+2m\geq 100k+6$ គ្រប់ $k\in IN$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $m+n$ គឺ 106 ដែលត្រូវនឹង $k=1$ ។

លំហាត់ទី១០ (IMO 1962)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត **n** ដោយដឹងថា
ក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់ **n** មានលេខ **6** ជាលេខចុងក្រោយបំផុត ។
បើគេលុបលេខ **6** ចុងក្រោយនោះចោលហើយយកទៅសរសេរ
ពីខាងមុខនៃលេខដែលនៅសល់នោះគេបានចំនួនមួយទៀតស្មើនឹង **4**
ដងនៃចំនួនដើម **n** ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត **n**

សន្មតថា **n** ជាចំនួនមានលេខ $\mathbf{k+1}$ ខ្ទង់នោះគេបាន៖

$\mathbf{n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 6} = 10.N + 6}$ ដែល $\mathbf{N = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}}$

យក $\mathbf{p = \overline{6 a_k a_{k-1} \dots a_1} = 6 \times 10^k + N}$ ។

តាមលក្ខខណ្ឌនៃសម្មតិកម្មគេបាន $\mathbf{p = 4 \times n}$

គេទាញ $\mathbf{6 \times 10^k + N = 4(10.N + 6)}$

គេទាញបាន $N = 2\times\frac{10^k - 4}{13}$ ។

តម្លៃ k ដំបូងដែលធ្វើឱ្យ $10^k - 4$

ចែកដាច់នឹង 13 គឺ $k = 5$ ហើយ $N = 2\times\frac{10^5 - 4}{13} = 15384$

ដូចនេះ $n = 10N + 6 = 153846$ ។

លំហាត់ទី១១ (IMO 1967)

គេឱ្យ $k\,,m\,,n$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដោយដឹងថា $m+k+1$

ជាចំនួនបឋមធំជាង $n+1$ ។ គេយក $c_s = s(s+1)$ ។

ចូរស្រាយថាផលគុណ៖

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)(c_{m+3}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$$

ចែកដាច់នឹងផលគុណ $c_1.c_2.c_3...c_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាផលគុណ៖

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)(c_{m+3}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$$

ចែកដាច់នឹងផលគុណ $c_1.c_2.c_3...c_n$

តាង $P_n = \prod_{i=1}^{n}\left(c_{m+i}-c_k\right)$ និង $Q_n = \prod_{i=1}^{n}\left(c_i\right)$

គេមាន $c_x - c_y = (x-y)(x+y+1)$

គេបាន $P_n=\prod_{i=1}^{n}(m+i-k)(m+i+k+1)$

$$=\prod_{i=1}^{n}(m+i-k)\times\prod_{i=1}^{n}(m+i+k+1)$$

ឬ $P_n=\frac{(m+n-k)!}{(m-k)!}\times\frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!}$

ហើយ $Q_n=\prod_{i=1}^{n}\left[i(i+1)\right]=n!(n+1)!$

គេបាន $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(m+n-k)!(m+n+k+1)!}{n!(n+1)!(m-k)!(m+k+1)!}$

គេមាន $C_{m+n-k}^{n}=\frac{(m+n-k)!}{n!(m-k)!}$

និង $C_{m+n+k+1}^{n+1}=\frac{(m+n+k+1)!}{(n+1)!(m+k)!}$

នោះ $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{1}{m+k+1}.C_{m+n-k}^{n}.C_{m+n+k+1}^{n+1}$

គេមាន C_{m+n-k}^{n} ជាចំនួនគត់

ហើយ $\frac{1}{m+k+1}C_{m+n+k+1}^{n+1}=\frac{(m+n+k+1)!}{(n+1)!(m+k)!(m+k+1)}$

$$=\frac{(m+n+k+1)\quad !}{(n+1)\ (m+k+1)}$$

តាមសម្មតិកម្ម $m+k+1$ ជាចំនួនបថមធំជាង $n+1$

នោះវាគ្មានកត្តារួមជាមួយនឹង $(n+1)!$ ហើយ$(m+n+k+1)!$

ចែកដាច់នឹង $(n+k+1)!$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Gauss គេបាន $C_{m+n+k+1}^{n+1}$ ចែកដាច់នឹង $m+k+1$

ដូចនេះ $(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)(c_{m+3}-c_k)...(c_{m+n}-c_k)$

ចែកដាច់នឹងផលគុណ $c_1.c_2.c_3...c_n$ ។

លំហាត់ទី១២ (IMO 2005)

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1, a_2, a_3, \ldots$ កំណត់ដោយ $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះមានតែមួយគត់គឺ 1

យើងនឹងបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនបឋម p ចែកដាច់ a_n

ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន n ។

សម្គាល់ឃើញថាចំពោះ $p = 2$ និង $p = 3$ ចែកដាច់

$a_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 48$ ។

យើងឧបមាថា $p \geq 5$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងមាន

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$
$$6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

នោះ $3.2^{p-1}+2.3^{p-1}+6^{p-1}\equiv 3+2+1\equiv 6\equiv 0 \pmod 6$

ឬ $6(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1)\equiv 0 \pmod p$

នោះ $6a_{p-2}$ ចែកដាច់នឹង p ។

ពីព្រោះតែ p បឋមទៅនឹង 6 នោះ a_{p-2} ចែកដាច់នឹង p ។

លំហាត់ទី១៣ (IMO Shortlist 2003)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{k}$ តូចជាងគេ ដោយដឹងថាមានចំនួនគត់

$\mathbf{x_1, x_2, x_3, ..., x_k}$ ដែល $\mathbf{x_1^{\,3} + x_2^{\,3} + ... + x_k^{\,3} = 2002^{2002}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{k}$ ដែលតូចជាងគេគឺ $\mathbf{k = 4}$ ។

ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា $\mathbf{2002^{2002}}$ មិនអាចជាផលបូកនៃគូបបីចំនួន

គេមាន $\mathbf{2002 \equiv 4 \ (mod\ 9)}$ នោះ $\mathbf{2002 \equiv 4^3 \equiv 1 \ (mod 9)}$

គេបាន $\mathbf{2002^{2002} = (2002^3)^{67}.2004 \equiv 4 \ (mod 9)}$

ម៉្យាងទៀត $\mathbf{x^3 \equiv 0, \pm 1 \ (mod 9)}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $\mathbf{x}$ ។

ហេតុនេះ $\mathbf{x_1^{\,3} + x_2^{\,3} + x_3^{\,3}}$ ចែកនឹង $\mathbf{9}$ មិនអាចឱ្យសំណល់ស្មើ $\mathbf{4}$

បានទេ ។ ដូចនេះ $\mathbf{2002^{20(}}$ មិនអាចសរសេរជាផលបូកគូបប្រាកដ

នៃបីចំនួនគត់បានទេ។

យើងនឹងបង្ហាញថា 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកនៃគូបប្រាកដ

នៃបួនចំនួនបាន ។

គេមាន $2002 = 1000 + 1000 + 1 + 1 = 10^3 + 10^3 + 1 + 1$

ដោយ $2002^{2002} = 2002^{2001} \times 2002$

$$= (2002^{667})^3 (10^3 + 10^3 + 1 + 1)$$
$$= (2002^{667}.10)^3 + (2002^{667}.10)^3 + (2002^{667})^3 + (2002^{667})^3$$

ដូចនេះ $k = 4$ ។

លំហាត់ទី១៤ (IMO 1976)

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ៖

$u_0 = 2\ ,\ u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n({u_{n-1}}^2 - 2) - u_1$ ចំពោះ $n = 1, 2, \ldots$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$ ។

(ដែល $\lfloor x \rfloor$ តាងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង x)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$

ជាដំបូងយើងគណនាតួ $u_2, u_3, u_4\ , u_5$ គេបានលំនាំដូចខាងក្រោម៖

$$u_0 = 2 = 2^0 + \frac{1}{2^0}\quad ,\quad u_1 = \frac{5}{2} = 2^1 + \frac{1}{2^1}$$

$$u_2 = \frac{5}{2} = 2^1 + \frac{1}{2^1}\ ,\quad u_3 = 2^3 + \frac{1}{2^3}$$

$$u_4 = 2^5 + \frac{1}{2^5}\quad ,\qquad u_5 = 2^{11} + \frac{1}{2^{11}}$$

យើងសង្កេតឃើញថាកន្សោម u_n មានរាងទូទៅ $u_n = 2^{V_n} + \frac{1}{2^{V_n}}$

ដែល (V_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $(V_n): 0,1,1,3,5,11,.....$

តាងស្វ៊ីត (w_n) ដែល $w_n = V_n + V_{n+1}$ គ្រប់ $n \geq 0$

គេបាន ៖ $(W_n): 1 , 2 , 4,8,16,....$ នាំឱ្យ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានតួ $W_0 = 1$ និង រេសុង $q = 2$ ។

គេបាន $W_n = 2^n$ នោះ $V_{n+1} + V_n = 2^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(-1)^{n+1}$ គេបាន៖

$$(-1)^{n+1} V_{n+1} - (-1)^n V_n = (-1)^{n+1} 2^n$$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^{k+1} V_{k+1} - (-1)^k V_k\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\left[(-1)^{k+1} 2^k\right]$

$$(-1)^n V_n - V_0 = \frac{(-1)^n 2^n - 1}{3}$$

ដោយ $V_0 = 0$ នោះ $V_n = \frac{(-1)^n 2^n - 1}{(-1)^n.3} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$

ដូចនេះ $u_n = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$

ដោយ $2^n \equiv (-1)^n \pmod 3$ នោះ $3 \mid 2^n - (-1)^n$

ហើយ $2^{-\frac{2^n-(-1)^n}{3}} < 1$

ដូចនេះ $\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$ ។

លំហាត់ទី១៥ (IMO 2010)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f: IR \to IR}$ ដោយដឹងថាសមភាព

$\mathbf{f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor}$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

($\lfloor \mathbf{a} \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ $\mathbf{a}$) ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f: IR \to IR}$

គ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ គេមានសមភាព

យក $\mathbf{x = 0}$ និង $\mathbf{y = 0}$ គេបាន $\mathbf{f(0) = f(0)\lfloor f(0) \rfloor}$

គេទាញ $\mathbf{f(0)(1 - \lfloor f(0) \rfloor) = 0}$ នោះ $\mathbf{f(0) = 0}$ ឬ $\mathbf{\lfloor f(0) \rfloor = 1}$

-ករណី $\mathbf{\lfloor f(0) \rfloor = 1}$

យក $\mathbf{y = 0}$ ជំនួសក្នុង $\mathbf{(*)}$ គេបាន $\mathbf{f(0) = f(x)\lfloor f(0) \rfloor}$

ឬ $\mathbf{f(x) = f(0)}$ នាំឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាអនុគមន៍ថេរ

តាង $\mathbf{f(x) = c}$ ជំនួសក្នុងសមីការ $\mathbf{(*)}$ គេបាន $\mathbf{c = c\lfloor c \rfloor}$

នោះ $c=0$, $\lfloor c \rfloor = 1$ ។

ដូចនេះ $f(x)=0$ ឬ $f(x)=c$

ដែល $c\in[1,2)$ $\left(\text{ព្រោះ } \lfloor c \rfloor = 1\right)$

-ករណី $f(0)=0$

យក $x=y=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(1)\lfloor f(1) \rfloor$

នោះ $f(1)=0$ ឬ $\lfloor f(1) \rfloor = 1$

ក. ចំពោះ $f(1)=0$ នោះយើងយក $x=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$f(y)=f(1)\lfloor f(y) \rfloor = 0 \ \forall y \in IR$ ។

ខ. ចំពោះ $\lfloor f(1) \rfloor = 1$ នោះយើងយក $y=1$ គេបាន

$f(\lfloor x \rfloor)=f(x)$ (**)

យក $x=2$, $y=\dfrac{1}{2}$ ក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(2)\left\lfloor f(\dfrac{1}{2}) \right\rfloor$

តែតាម (**) គេបាន $f(\frac{1}{2})=f(0)=0$ ហេតុនេះគេទាញបាន

$f(1)=0$ មិនពិតព្រោះ $\lfloor f(1)\rfloor=1$ ។

សរុបមកគេបានចម្លើយ $f(x)=0\ ,\forall x\in IR$

ឬ $f(x)=c\ ,\forall x\in IR$ ដែល $1\le c<2$ ។

លំហាត់ទី១៦ (IMO 1984)

ចូរកំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{a,b}$ ដោយដឹងថា៖

$\mathbf{(i):\ ab(a+b)}$ មិនចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$

$\mathbf{(ii):\ (a+b)^7-a^7-b^7}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7^7}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{a,b}$ ៖

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេបាន៖

$$\mathbf{(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2}$$

តាមបម្រាប់គេមាន $\mathbf{(i):\ ab(a+b)}$ មិនចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\mathbf{(ii):\ (a+b)^7-a^7-b^7}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7^7}$

លុះត្រាតែ $\mathbf{a^2+ab+b^2}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7^3}$ ។

គេមាន $\mathbf{(a+b)^2>a^2+ab+b^2\geq 7^3}$ នោះ $\mathbf{a+b\geq 19}$

ដោយធ្វើការសាកល្បងជំនួស $a=1\,,\,b=18$ នោះគេបាន៖

$a^2+ab+b^2=1^2+1\times18+18^2=343=7^3$

ដូចនេះគូ $a=1\,,\,b=18$ ជាចម្លើយ។

ម៉្យាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទអឺលែ៖

បើ $GCD(a,n)=1$ នោះ $a^{\varphi(n)}\equiv1\ (\bmod n)$ ។

គេមាន $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ a^2+ab+b^2 ចែកដាច់នឹង 7^3 លុះត្រាតែ

$a^3\equiv b^3\ (\bmod 7^3)$ និង $a-b$ ចែកមិនដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $\varphi(7^3)=7^3-7^2=6\times7^2=3\times98$ ។

បើ c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានចែកមិនដាច់នឹង 7 នោះគេបាន

$(c^{98})^3\equiv1\ (\bmod 7^3)$ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $a^3\equiv1\ (\bmod\ 7^3)$ លុះត្រាតែ $a=c^{98}$

ឧទាហរណ៍៖

-បើគេយក $c=2$ នោះ $2^{98}\equiv 18 \pmod{7^3}$

ហេតុនេះ $\left(2^{98}\right)^3\equiv 18^3\equiv 1 \pmod{7^3}$

ដូចនេះ $a=18$, $b=1$ ជាចម្លើយមួយ ។

-បើគេយក $c=3$ នោះ $3^{98}\equiv 324 \pmod{7^3}$

ហេតុនេះ $\left(3^{98}\right)^3\equiv 324^3\equiv 1 \pmod{7^3}$

ដូចនេះ $a=324$, $b=1$ ជាចម្លើយផ្សេងមួយទៀត ។

លំហាត់ទី១៧ (Russia 2001)

គេឱ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា ។

គេដឹងថា $ab(a+b)$ចែកដាច់នឹង a^2+ab+b^2 ។

ចូរស្រាយថា $|a-b|>\sqrt[3]{a}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$

តាង $\delta=GCD(a,b)$ នាំឱ្យមានគូចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា

(u,v) ដែល $a=\delta u$ និង $b=\delta v$

គេបាន $\dfrac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{\delta uv(u+v)}{u^2+uv+v^2}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

យើងមាន $GCD(u^2+uv+v^2,u)=GCD(v^2,u)=1$

ហើយ $GCD(u^2+uv+v^2,v)=GCD(u^2,v)=1$

និង $GCD(u^2+uv+v^2,u+v)=GCD(v^2,u+v)=1$

នោះប្រភាគ $\frac{\delta uv(u+v)}{u^2+uv+v^2}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $u^2+uv+v^2\,|\,\delta$

នោះគេបាន $\delta \ge u^2+uv+v^2$ ។

គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា (u,v)

គេមាន $|u-v|\ge 1$ ហេតុនេះ $|a-b|^3=|u-v|^3.\delta^3\ge \delta^3$

តែ $\delta \ge u^2+uv+v^2$ នោះ $|a-b|^3\ge \delta^2(u^2+uv+v^2)>\delta^2uv$

ដោយ $ab=\delta^2uv$ នោះ $|a-b|^3>ab$

ដូចនេះ $|a-b|>\sqrt[3]{ab}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យ $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាចំនួនគត់។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $\mathbf{m \in IN}$ ដែល

$\mathbf{28n^2+1=m^2}$ ឬ $\mathbf{m^2-28n^2=1}$ ជាសមីការ **Pell** ។

គូចម្លើយដំបូងនៃសមីការនេះគឺ $\mathbf{m=127\ ,\ n=24}$

ព្រោះ $\mathbf{127^2-28\times 24^2=1}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{k\geq 1}$ គេអាចសរសេរ៖

$$\mathbf{m^2-28n^2=127^2-28\times 24^2=(127-28\times 24^2)^k}$$

$$\mathbf{(m-2\sqrt{7}n)(m+2\sqrt{7}n)=(127-48\sqrt{7})^k(127+48\sqrt{7})^k}$$

គេទាញ $\begin{cases} m-2\sqrt{7}n=(127-48\sqrt{7})^k \\ m+2\sqrt{7}n=(127+48\sqrt{7})^k \end{cases}$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការះ

$$m=\frac{(127-48\sqrt{7})^k+(127+48\sqrt{7})^k}{2}$$

$$n=\frac{(127+48\sqrt{7})^k-(127-48\sqrt{7})^k}{4\sqrt{7}}$$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2m$

$$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+(127+48\sqrt{7})^k+(127-48\sqrt{7})^k$$

ដោយ $127\pm 48\sqrt{7}=(8\pm 3\sqrt{7})^2$

និង $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})=1$ នោះគេបាន

$$2+(1\quad+4\ \sqrt{7})^k+(1\quad-4\ \sqrt{7})^k=\left[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k\right]^2$$

គេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k]^2$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ព្រោះ $(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី១៩

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន 3^n+n^3 ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $3^n n^3+1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដំណោះស្រាយ

-សន្មតថា 3^n+n^3 ចែកដាច់នឹង 7 នោះ n ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ Euler គេបាន $n^6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,7)$ ។

ចំនួន 3^n+n^3 ចែកដាច់នឹង 7 នោះគេបានដូចគ្នា $n^3(3^n+n^3)$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $n^3(3^n+n^3)=(n^3 3^n+1)+(n^6-1)$

ដោយ $n^6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,7)$ នោះគេទាញបាន $n^3 3^n+1$ ចែកដាច់នឹង7 ។

-សន្មតថា $n^3 3^n + 1$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ n ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ Euler គេបាន $n^6 \equiv 1 \pmod 7$ ។

ចំនួន $n^3 3^n + 1$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $n^3(n^3 3^n + 1)$ ចែកដាច់នឹង 7

គេមាន $n^3(n^3 3^n + 1) = (n^6 - 1)3^n + n^3 + 3^n$

ដោយ $n^6 \equiv 1 \pmod 7$ នោះគេទាញបាន $n^3 + 3^n$ ចែកដាច់នឹង7

ដូចនេះ ចំនួន $3^n + n^3$ ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $3^n n^3 + 1$

ចែកដាច់នឹង 7 ។

លំហាត់ទី២០ (IMO 1959)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{21n+4}{14n+3}$

ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតគេបាន៖

$$21n+4=(14n+3)\times 1+(7n+1)$$
$$14n+3=(7n+1)\times 2+1$$
$$7n+1=(7n+1)\times 1+0$$

គេបាន $GCD(21n+4,14n+3)=1$

ហេតុនេះ $21n+4$ និង $14n+3$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដូចនេះ $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់ x និង y ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$x^3+x^2+x=y^2+y$ ។

(**Croatia Team Selection Tests 2011**)

២-ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_1=1\ ;\ a_n=n(a_1+a_2+...+a_{n-1})\ ,\forall n>1$

ក/ ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ n គូ , a_n ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

ខ/ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនសេស n ដើម្បីឲ្យ a_n ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

(**Albania National Olympiad 2011**)

៣-ចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា ៖

$3^a=2b^2+1$ ។

(**Brazil National Olympiad 2010**)

៤-ចូរកំណត់គ្រប់គូ **(a, b)** នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា ៖

$3^a + 7^b$ ជាការេប្រាកដ ។

(**Canada National Olympiad 2009**)

៥-ចូរបង្ហាញថាចំនួន $3^{4^5} + 4^{5^6}$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរ

ចំនួនគត់ធំជាង 10^{2009} ។

(**Costa Rica Final Round 2009**)

៦-ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន **n** ដើម្បីឲ្យ $2^{n-1}n+1$

ជាការេប្រាកដ ។

(**Georgia Team Selection Tests 2005**)

៧-ចូរដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនគត់នៃសមីការ ៖

$x^3y^2(2y-x) = x^2y^4 - 36$

(**Greece National Olympiad 2011**)

៨-ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួគត់វិជ្ជមាន $n>1$ ដោយដឹងថា n^2 ចែកមិនដាច់

$(n-2)!$ ។

(India National Olympiad 2010)

៩-គេឲ្យ a និង b ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $a>b$ ។

យើងដឹងថា $GCD(a-b,ab+1)=1$ និង $GCD(a+b,ab-1)=1$

ចូរបង្ហាញថា $(a-b)^2+(ab+1)^2$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

(Iran National Math Olympiad (Second Round) 2010)

១០-ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,n,p,q,r) ដោយដឹងថា ៖

$$a^n-1=(a^p-1)(a^q-1)(a^r-1)$$

(Japan Mathematical Olympiad Finals 2011)

១១-ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត $x\in IN$ ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{7x^{25}-10}{83}$

ជាចំនួនគត់មួយ ។

(Korea National Olympiad 1993)

១២-ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាននូវសមីការ ៖

$$\mathbf{x^3 + 7x^2 + 35x + 27 = y^3}$$

(**Kyrgyzstan National Olympiad 2010**)

១៣-គេឲ្យ $\mathbf{m,n}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដោយដឹងថា $\mathbf{m+n+1}$

ជាចំនួនបឋម ហើយចែកដាច់ $\mathbf{2(m^2+n^2)-1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{m=n}$ ។ (**Switzerland Final Round 2010**)

១៤-គេឲ្យ $\mathbf{m,n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថាវាមានគូនៃចំនួន

គត់វិជ្ជមាន $\mathbf{(a,b)}$ ច្រើនរាប់មិនអស់ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{a+b \mid am^a + bn^b \ ; \ gcd(a,b)=1}$ ។

(**China National Olympiad 2011**)

១៥-ចូរកំណត់គ្រប់លេខដែលអាច $\mathbf{x,y,z}$ ដោយដឹងថាចំនួន

$\mathbf{\overline{13xy45z}}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{792}$ ។

(**Croatia National Olympiad 2005**)

ជំពូកទី៤

ធរណីមាត្រ

លំហាត់

១-គេឲ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a\,,AC=b\,,AB=c}$ ។

$\mathbf{P}$ ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ ហើយ $\mathbf{I}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

$\mathbf{a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2=(a+b+c).PI^2+abc}$ ។

២-គេឲ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a\,,AC=b\,,AB=c}$ ។

ចូរកំណត់ចំណុច $\mathbf{P}$ នៃប្លង់ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2}$

មានតម្លៃអប្បបរមា រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានេះ ។

៣-គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ ចំណុច **D** និង **E** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ **BC**ដោយដឹងថាបន្ទាត់ **AD** និង **AE** ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ះ

នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **ABC** ត្រង់ **B** និង **C** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{BE}{CD}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$?

៤-គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង

ត្រីកោណនេះ ។

កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ **A , B , C** កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់

A' , B' , C' ។ ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4}<\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\le\frac{8}{27}$ ។

៥-គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ប៉ះជ្រុង **[BC],[CA],[AB]**

រៀងគ្នាត្រង់ **K,L,M** ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពីចំនុច **B** ស្របនឹង **(MK)** កាត់**(LM)** និង**(LK)** រៀងគ្នាត្រង់ **R** និង **S** ។

ចូរស្រាយថា $\angle RIS$ ជាមុំស្រួច

៦-គេតាង I និង O រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\angle OIA = 90^{0}$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

៧-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c និងមានផ្ទៃក្រឡា S ឧបមាថាDEF ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE + EF + FD \geq \dfrac{8S^2}{abc}$

៨-គេយក I និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC ។ រង្វង់ ω_A ចារឹកក្នុងមុំ A វាប៉ះទៅនឹង AB , AC និង BC រៀងគ្នាត្រង់ចំនុច K, M និង N រៀងគ្នា ។

បើសិនជាចំនុចកណ្តាល P នៃអង្កត់ KM ស្ថិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC នោះចូរបង្ហាញថាបីចំនុច O , I , N រត់ត្រង់គ្នា។

៩-ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC គេយក D, E, F

ជាចំនុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ $[BC]$ $[CA],[AB]$ រៀងគ្នា ។

យក P ជាចំនុចប្រសព្វរវាង $[AD]$ និង $[EF]$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{AB}{AF}\times DC+\frac{AC}{AE}\times DB=\frac{AD}{AP}\times BC$ ។

១០-គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង O ជារង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ

ត្រីកោណ ABC ដែលមិនមែនជាត្រីកោណសមង្ស័

ចូរបង្ហាញថា $\angle AIO\le 90^o$ លុះត្រាតែ $2BC\le AB+AC$

១១-ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ មួយមាន $\angle BDC=90^o$

ហើយជើងនៃចំណោលកែងពី D ទៅប្លង់ (ABC)

ជាប្រសព្វនៃកម្ពស់នៃ ΔABC ។

ចូរស្រាយថា $(AB+BC+CA)^2\le 6(AD^2+BD^2+CD^2)$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព?

១២-គេឱ្យ **ABC** ជាត្រីកោណមួយហើយ **D** ជាជើងនៃកម្ពស់គូស

ពីកំពូល **A** ។

យក **E** និង **F** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់កាត់តាម**D** ដោយដឹងថា **AE**

កែងនឹង **BE** ហើយ **AF** កែងនឹង **CF** ដែល **E** និង **F**

ខុសពី **D** យក **M** និង **N** ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ **BC**

និង **EF** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា **AN** កែងនឹង **NM** ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

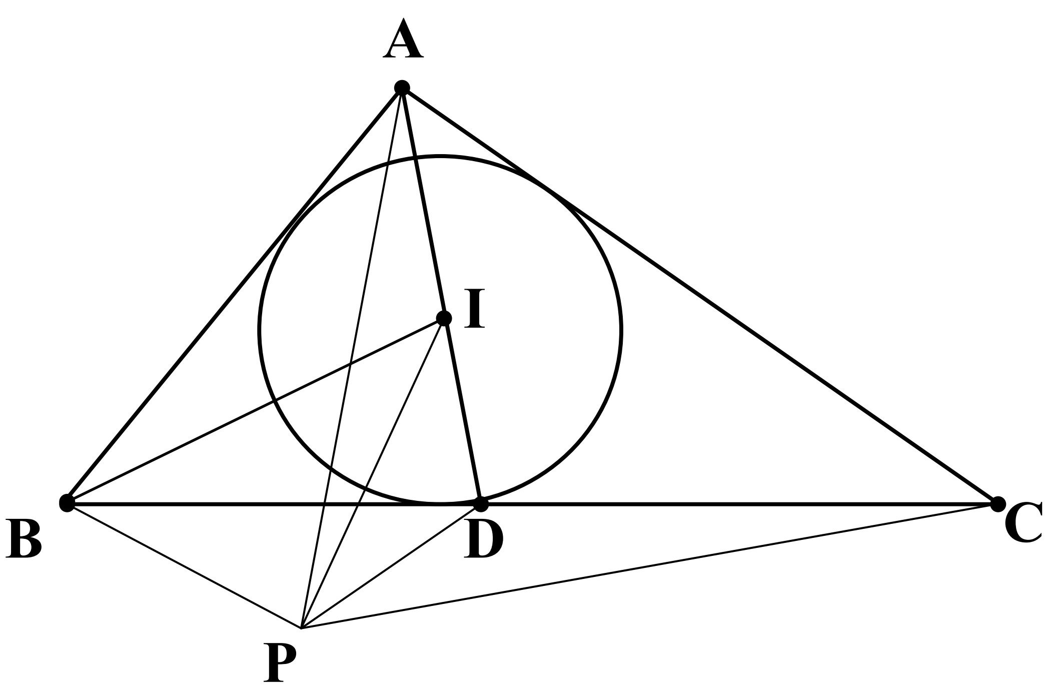
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a, AC = b, AB = c$ ។

P ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

$a.PA^2 + b.PB^2 + c.PC^2 = (a+b+c).PI^2 + abc$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

យក D ជាប្រសព្វរវាង AI និង BC នោះ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុង

នៃមុំ A របស់ត្រីកោណ ABC ។

គេមាន $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$

ឬ $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}c.AD\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b.AD\sin\frac{A}{2}$

គេទាញ $AD=\frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

$$=\frac{2p(2p-2a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}$$

នាំឲ្យ $AD^2=\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\times\frac{p(p-a)}{bc}=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$.

ដោយ AD ជាកន្លះពុះក្នុងនៃមុំ A នៃ ΔABC នោះគេមាន ៖

$$\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}=\frac{BD+DC}{AB+AC}=\frac{BC}{AB+AC}$$

គេទាញ $BD=\frac{ac}{b+c}$, $DC=\frac{ab}{b+c}$ ។

ដូចគ្នាដែរ BI ជាកន្លះពុះក្នុងនៃមុំ B នៃ ΔABD នោះគេមាន ៖

$$\frac{AI}{AB}=\frac{ID}{BD} \text{ ឬ } \frac{AI}{c}=\frac{ID}{\frac{ac}{b+c}} \text{ ឬ } \frac{AI}{b+c}=\frac{ID}{a}=\frac{AI+ID}{b+c+a}=\frac{AD}{2p}$$

គេទាញ $\frac{AI}{AD}=\frac{b+c}{2p}$, $\frac{ID}{AD}=\frac{a}{2p}$

និង $AI.ID=\frac{a(b+c)}{4p^2}.AD^2=\frac{abc}{b+c}.\frac{p-a}{p}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Stewart គេបាន ៖

-ចំពោះ PD ធៀបនឹងត្រីកោណ PBC

គេមាន $BC.(PD^2+BD.DC)=BD.PC^2+DC.PB^2$

$$a(PD^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2})=\frac{ac}{b+c}.PC^2+\frac{ab}{b+c}.PB^2$$

គេទាញ $(b+c).PD^2=b.PB^2+c.PC^2-\frac{a^2bc}{b+c}$ (1)

-ចំពោះ **PI** ធៀបនឹងត្រីកោណ **PAD**

គេមាន $AD.(PI^2+AI.ID)=AI.PD^2+ID.PA^2$

ឬ $$PI^2=\frac{AI}{AD}.PD^2+\frac{ID}{AD}.PA^2-AI.ID$$

$$PI^2=\frac{b+c}{2P}.PD^2+\frac{a}{2P}.PA^2-\frac{abc}{b+c}.\frac{p-a}{p}$$

$$2p.PI^2=(b+c).PD^2+a.PA^2-\frac{2abc(p-a)}{b+c}$$

$$2p.PI^2=(b+c).PD^2+a.PA^2-\frac{abc(b+c-a)}{b+c} \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង (2) បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន ៖

$$a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2=(a+b+c).PI^2+abc$$ ។

លំហាត់ទី២ (Korea National Olympiad 1993)

គេឲ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a, AC=b, AB=c}$ ។

ចូរកំណត់ចំណុច $\mathbf{P}$ នៃប្លង់ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2}$

មានតម្លៃអប្បបរមា រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានេះ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\mathbf{I}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$

តាមទ្រឹស្តីបទ EULER ចំពោះគ្រប់ចំណុច $\mathbf{P}$ នៃប្លង់គេមានសមភាព

$$\mathbf{a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2=(a+b+c).PI^2+abc}$$

ដោយ $\mathbf{PI^2\geq 0}$ នោះ $\mathbf{a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2\geq abc}$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $\mathbf{a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2}$ មានតម្លៃអប្បបរមា

លុះត្រាតែចំណុច $\mathbf{P\equiv I}$ ។

ដូចនេះចំណុច $\mathbf{P}$ គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ $\mathbf{\Delta ABC}$ ហើយតម្លៃអប្បបរមា

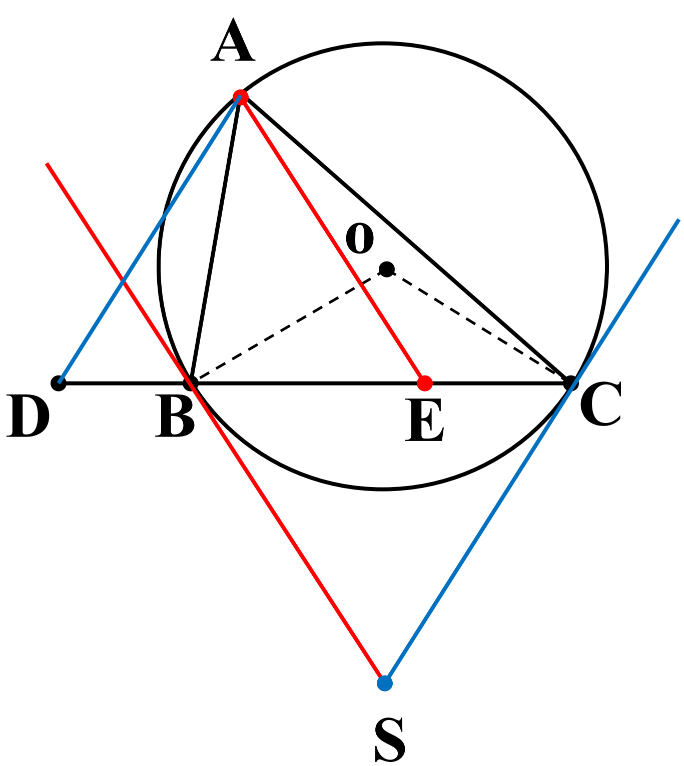
នៃ $\mathbf{a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2}$ គឺ $\mathbf{abc}$ ។

លំហាត់ទី៣ (Spain Mathematical Olympiad 1998)

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ ចំណុច **D** និង **E** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់**BC** ដោយដឹងថាបន្ទាត់ **AD** និង **AE** ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **ABC** ត្រង់ **B** និង **C** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{BE}{CD} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$?

ដំណោះស្រាយ



តាង **S** ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **ABC** ត្រង់ **B** និង **C** រៀងគ្នា ។

គេបាន $\angle SBC = \angle BAC$

ដោយ $AE//SB$ នោះ $\angle SBC = \angle AEB$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

គេទាញ $\angle SBC = \angle BAC = \angle AEB$

ហើយ $\angle ABC = \angle ABE$ (មុំរួម) នាំឲ្យ ΔAEB ដូច ΔCAB ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ឬ $BE = \frac{AB^2}{BC}$ **(1)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $CD = \frac{AC^2}{BC}$ **(2)**

ចែកសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន $\frac{BE}{CD} = \frac{\frac{AB^2}{BC}}{\frac{AC^2}{BC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$

ដូចនេះ $\frac{BE}{CD} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ ។

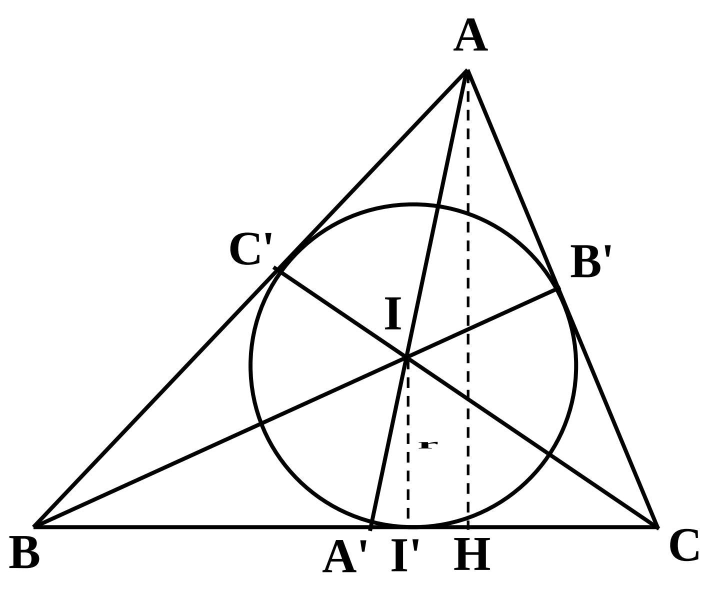
លំហាត់ទី៤ (IMO 1991)

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ **A , B , C** កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ **A' , B' , C'** ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ

តាង S និង T រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ABC និង IBC

យើងមាន $S = \frac{1}{2}AH.BC$ និង $T = \frac{1}{2}II'.BC$

គេបាន $\frac{T}{S} = \frac{II'}{AH}$ (i)

ត្រីកោណកែង $AA'H$ និង $IA'I'$ មានមុំ $\angle A'AH = \angle A'II'$

(មុំត្រូវគ្នា) ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបាន $\frac{II'}{AH} = \frac{IA'}{AA'} = \frac{AA' - AI}{AA'} = 1 - \frac{AI}{AA'}$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន $\frac{T}{S} = 1 - \frac{AI}{AA'}$

ដោយ $T = \frac{1}{2}a.r$ និង $S = pr = \frac{a+b+c}{2}.r$

គេបាន $\frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{a+b+c}{2}.r} = 1 - \frac{AI}{AA'}$

នាំឱ្យ $\frac{AI}{AA'}=1-\frac{a}{a+b+c}=\frac{b+c}{a+b+c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c}$ (2) និង $\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$ (3)

ធ្វើវិធីគុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (3) គេបាន៖

$$\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \quad (4)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេទាញ $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

ហេតុនេះ $\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\frac{8}{27}$ (*)

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}>\frac{1}{4}$ ពិត

យើងបាន $4(a+b)(b+c)(c+a)>(a+b+c)^3$

ដោយ $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$4(a+b)(b+c)(c+a) > a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)-a^3-b^3-c^3>0$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$$

ដោយ a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណមួយនោះ $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$

គេទាញ $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$ ពិត

ហេតុនេះ $\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} > \dfrac{1}{4}$ (**)

តាម (*) និង (**) គេបាន $\dfrac{1}{4} < \dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \dfrac{8}{27}$ ។

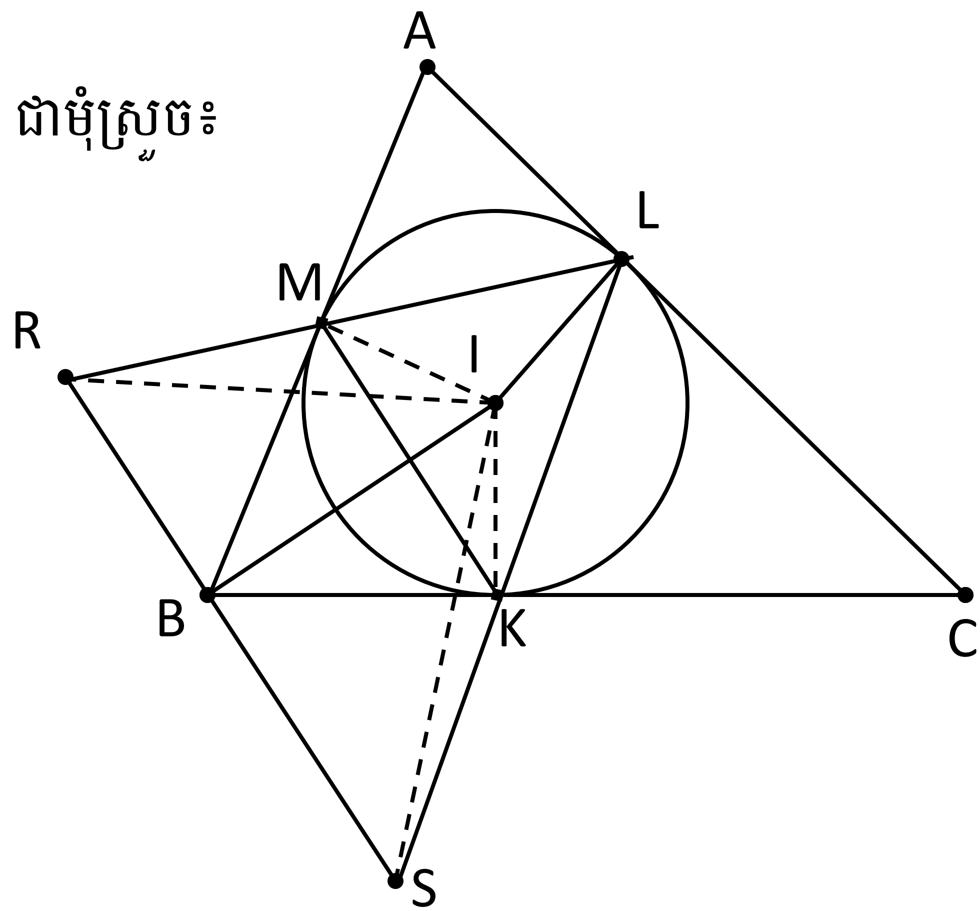
ដូចនេះ $\dfrac{1}{4} < \dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \dfrac{8}{27}$ ។

លំហាត់ទី៥ (IMO 1998)

គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ប៉ះជ្រុង **[BC],[CA],[AB]** រៀងគ្នាត្រង់ **K,L,M** ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពីចំនុច **B** ស្របនឹង **(MK)** កាត់**(LM)** និង**(LK)** រៀងគ្នាត្រង់ **R** និង **S** ។ ចូរស្រាយថា $\angle$**RIS** ជាមុំស្រួច

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\angle$**RIS** ជាមុំស្រួច៖



គេមាន $\angle AML = \angle BMR = 90^o - \frac{A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $\angle CKL = \angle BKS = 90^o - \frac{C}{2}$

និង $\angle BKM = \angle BMK = 90^o - \frac{B}{2}$ ។

ម៉្យាងទៀត $\angle LMK = \angle MRS = 90^o - \frac{B}{2}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **BRM** និងត្រីកោណ **BSK**

គេបាន $\frac{RB}{BM} = \frac{\sin(90^o - \frac{A}{2})}{\sin(90^o - \frac{C}{2})} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

ហើយដូចគ្នាដែរ $\frac{SB}{BK} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ ឬ $\frac{BK}{SB} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

គេទាញបាន $\frac{RB}{BM} = \frac{BK}{SB}$ នាំឱ្យ $BM.BK = RB.SB$

ដោយ $BM = BK$ នោះ $BM^2 = RB.SB$ (1)

គេមាន $(RS)//(MK)$ ហើយ $(IB)\perp(KM)$ នោះ $(IB)\perp(RS)$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័អនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណកែង **RIB** និង **SIB**

គេបាន $IR^2 = RB^2 + IB^2$ (2)

និង $IS^2 = SB^2 + IB^2$ (3)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **RIS** គេបាន៖

$$RS^2 = IR^2 + IS^2 - 2IR.IS.\cos\angle RIS \quad (4)$$

យកទំនាក់ទំនង (1),(2),(3) មកជំនួសក្នុង (4) គេបាន៖

$$\cos\angle RIS = \frac{RB^2 + SB^2 + 2IB^2 - (RB+SB)^2}{2IR.IS}$$

$$= \frac{2IB^2 - 2RB.SB}{2IR.IS} = \frac{IB^2 - BM^2}{IR.IS}$$

តែក្នុងត្រីកោណកែង **BIM** មាន $IB^2 = IM^2 + BM^2$

គេបាន $\cos\angle RIS = \dfrac{IM^2}{IR.IS} > 0$ នាំឱ្យ $\angle RIS$ ជាមុំស្រួច ។

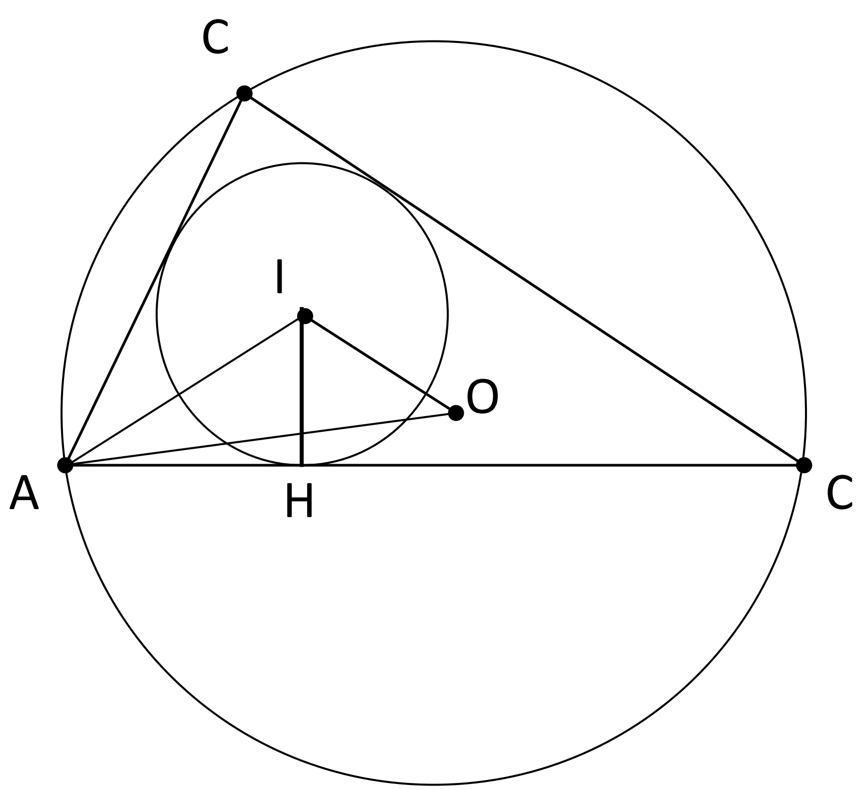
លំហាត់ទី៦

គេតាង **I** និង **O** រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ នៃត្រីកោណ គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ និង $p = \frac{a+b+c}{2}$

ហើយ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC

យក H ជាចំណោលនៃ I លើ $[AC]$ នោះគេបាន៖

$IH = r$ និង $AH = p - a$ ។

-សន្មតថា $\angle OIA = 90^o$ នោះ $OA^2 = OI^2 + IA^2$

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែគេមាន $OI^2 = R(R-2r)$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័ក្នុងត្រីកោណកែង $AHI : IA^2 = AH^2 + IH^2$

គេបាន $R^2 = R(R-2r) = r^2 + (p-a)^2$

ឬ $2rR = r^2 + (p-a)^2$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$

គេទាញ $2rR = \frac{abc}{2p}$ និង $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

គេបាន $\frac{abc}{2p} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} + (p-a)^2$

$$abc = 2(p-a)(p-b)(p-c) + 2p(p-a)^2$$
$$abc = 2(p-a)[(p-b)(p-c) + p(p-a)]$$
$$abc = (2p-2a)(p^2 - pb - pc + bc + p^2 - pa)$$
$$abc = (2p-2a)[2p^2 - p(a+b+c) + bc]$$
$$abc = (b+c-a)(2p^2 - 2p^2 + bc)$$
$$abc = bc(b+c-a)$$
$$a = b+c-a$$

គេទាញ $2a = b + c$ នោះ c, a, b ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

-សន្មតថា c, a, b ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះគេបាន $2a = b + c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ OIA គេបាន៖

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 - 2OI.IA\cos\angle OIA$$

គេទាញ $\cos\angle OIA = \dfrac{OI^2 + IA^2 - OA^2}{2OI.IA}$

$$= \frac{R(R-2r) + r^2 + (p-a)^2 - R^2}{2OI.IA}$$

$$= \frac{r^2 - 2rR + (p-a)^2}{2OI.IA}$$

ដោយ $b+c=2a$ នោះ $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3a}{2}$

$$r^2=\frac{(\frac{3a}{2}-a)(\frac{3a}{2}-b)(\frac{3a}{2}-c)}{\frac{3a}{2}}=\frac{a(3a-2b)(3a-2c)}{12a}$$

$$=\frac{9a^2-6(b+c)a+4bc}{12}=\frac{4bc-3a^2}{12}$$

ហើយ $R=2rR=\dfrac{abc}{2(\frac{3a}{2})}=\dfrac{bc}{3}$

គេបាន $\cos\angle OIA=\dfrac{\frac{4bc-3a^2}{12}-\frac{bc}{3}+(\frac{3a}{2}-a)^2}{2OI.IA}=0$

គេបាន $\angle OIA=90^o$ ។

ដូចនេះ $\angle OIA=90^o$ លុះត្រាតែ AB,BC,CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់ទី៧

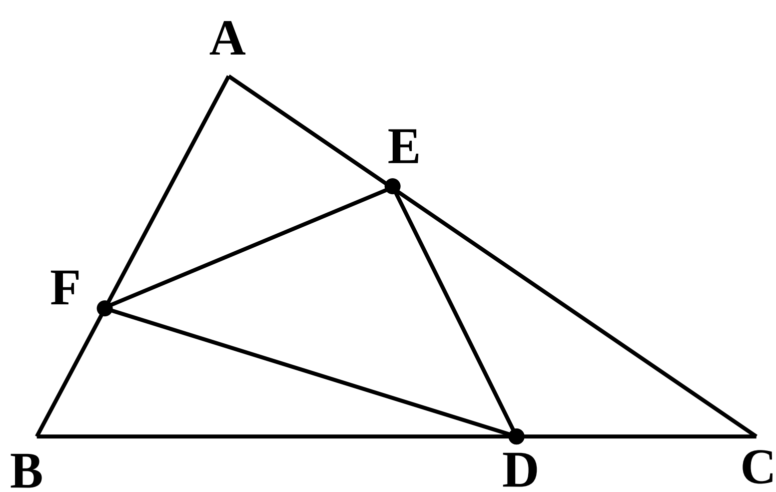
គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a,b,c** និងមានផ្ទៃក្រឡា **S** ។

ឧបមាថា **DEF** ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{DE + EF + FD \geq \dfrac{8S^2}{abc}}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{DE + EF + FD \geq \dfrac{8S^2}{abc}}$



តាង $\mathbf{BD = x}$, $\mathbf{CE = y}$, $\mathbf{AF = z}$ នោះ $\begin{cases} \mathbf{0 < x < a} \\ \mathbf{0 < y < b} \\ \mathbf{0 < z < c} \end{cases}$

គេបាន $DC = a - x$, $AE = b - y$, $BF = c - z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ BDF គេបាន៖

$$D\ \ ^2 = x^2 + (cF - z)^2 - 2x(c - z)c \quad B$$

ដោយ $\cos B = \cos(\pi - (A + C)) = -\cos(A + C)$

នោះ $DF^2 = x^2 + (c - z)^2 + 2x(c - z)\cos(A + C)$

$$= [x\cos A + (c - z)\cos C]^2 + [x\sin A - (c - z)\sin C]^2$$

គេទាញបាន $DF \geq |x\cos A + (c - z)\cos C|$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $DE = |y\cos B + (a - x)\cos A|$

និង $EF = |z\cos C + (b - y)\cos B|$ ។

ដោយប្រើវិសមភាពត្រីកោណគេបាន ◌ះ

$$DE + EF + FD \geq |a\cos A + b\cos B + c\cos C| \ \ (1)$$

តាង $T = a\cos A + b\cos B + c\cos C$

$$= R\sin 2A + R\sin 2B + R\sin 2C$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= 4R\sin A\sin B\sin C$$

$$= 4R.\frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2} = \frac{abc}{2(\frac{abc}{4S})^2} = \frac{8S^2}{abc}$$

ដូចនេះ $DE + EF + FD \geq \dfrac{8S^2}{abc}$ ។

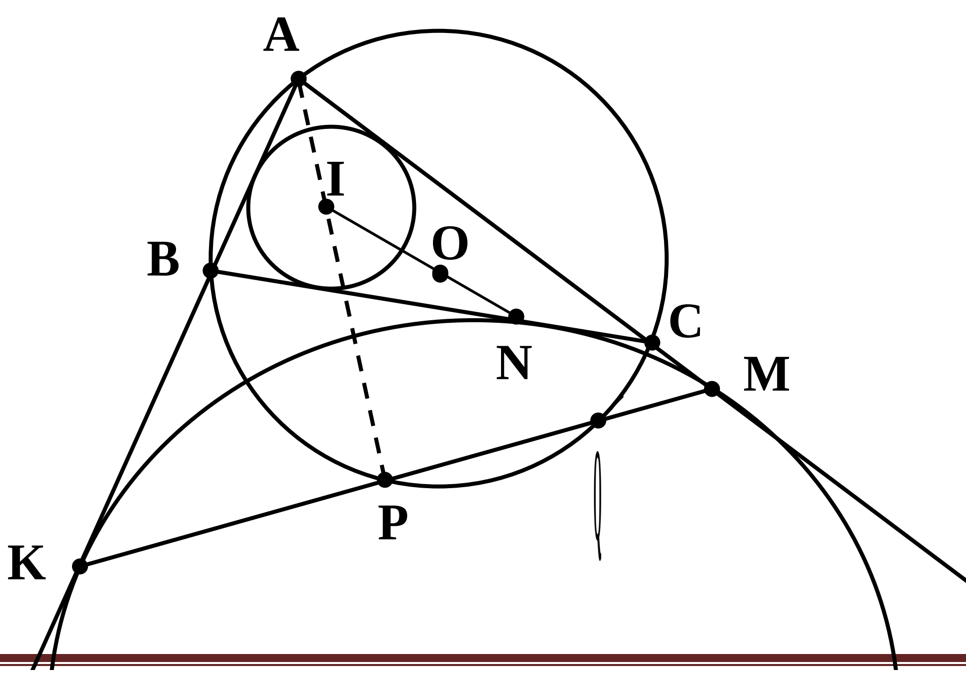
លំហាត់ទី៨

គេយក **I** និង **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃ Δ**ABC** ។ រង្វង់ ω_A ចារឹកក្នុងមុំ **A** វាប៉ះទៅនឹង **AB , AC** និង **BC** រៀងគ្នាត្រង់ចំនុច **K ,M** និង **N** រៀងគ្នា ។

បើសិនជាចំនុចកណ្តាល **P** នៃអង្កត់ **KM** ស្ថិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **ABC** នោះចូរបង្ហាញថាបីចំនុច **O , I , N** រត់ត្រង់គ្នា។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនុច **O , I , N** រត់ត្រង់គ្នា



យក $\mathbf{Q}$ ជាចំនុចប្រសព្វទីពីររវាងបន្ទាត់ $\mathbf{PM}$ ជាមួយរង្វង់ $\mathbf{(ABC)}$

តាង $\mathbf{KP = PM = x}$ និង $\mathbf{PQ = y}$ ។

យើងមាន $\mathbf{KB = p - c}$ និង $\mathbf{MC = p - b}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណនៃចំនុច $\mathbf{K}$ និង $\mathbf{M}$ ធៀបនឹងរង្វង់ $\mathbf{(ABC)}$

គេមាន $\mathbf{KP.KQ = KA.KB}$ និង $\mathbf{MP.MQ = MC.MA}$

ឬ $\mathbf{x(x + y) = p(p - c)}$ និង $\mathbf{x(x - y) = p(p - b)}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $\mathbf{2x^2 = p(2p - b - a) = pa}$

ឬ $\mathbf{x^2 = \frac{1}{2}pa}$ ហេតុនេះ $\mathbf{MK^2 = 4x^2 = 2pa}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{AKM}$ គេមាន៖

$$\mathbf{MK^2 = MA^2 + KA^2 - 2MA.KA\cos A}$$

ដោយ $\mathbf{MA = KA = p}$ និង $\mathbf{MK^2 = 2pa}$ នោះគេបាន៖

$$\mathbf{2pa = 2p^2 - 2p^2\cos A = 4p^2\sin^2\frac{A}{2}}$$ ឬ $$\mathbf{a = 2p\sin^2\frac{A}{2}}$$

តែ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

គេបាន $a=\frac{2p(p-b)(p-c)}{bc}$ ឬ $abc=2p(p-b)(p-c)$ (1)

យក D ជាចំណោលកែងនៃ I លើ BC ហើយសន្មតថា N' ជាប្រសព្វរវាង (OI) ជាមួយ $[BC]$ និង តាង E ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ BC ។

ឧបមាថា $N'=N$ នោះគេបាន $N'C=NC=p-b$

ដោយ $BD=p-b$ នោះគេបាន $ED=EN'$ ឬ E ជាចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[DN']$ ។

ត្រីកោណកែង $N'DI$ និងត្រីកោណកែង $N'EO$ មានមុំ $\angle DN'I$ រួមវាជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

ហេតុនេះគេបាន $\frac{DI}{EO}=\frac{DN'}{EN'}=\frac{2DE}{EN'}=2$ ឬ $DI=2.EO$

គេមាន $\angle BAC=\frac{\angle BOC}{2}=\angle EOC$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង EOC គេមាន $\cos\angle EOC=\cos A=\frac{OE}{OC}$

គេទាញ $OE=OC.\cos A$ នាំឱ្យ $DI=2.OC\cos A$

យក $DI=r$ និង $OC=R$ (កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅ ΔABC)

គេបាន $r=2R\cos A$ ឬ $\cos A=\frac{r}{2R}$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC គេមាន $S=\frac{abc}{4R}=pr$

និងទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{2S}}=\frac{2S^2}{abcp}$

ឬ $4S^2=ap(b^2+c^2-a^2)$ តែ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេបាន $4p(p-a)(p-b)(p-c)=ap(b^2+c^2-a^2)$

ឬ $4(p-a)(p-b)(p-c)=a(b^2+c^2-a^2)$

ដោយ $b^2+c^2-a^2=(b-c)^2-a^2+2bc$

$$=2bc+(b-c+a)(b-c-a)$$
$$=2bc-4(p-b)(p-c)$$

នោះ $4(p-a)(p-b)(p-c)=2abc-4a(p-b)(p-c)$

ឬ $abc=2(p-a)(p-b)(p-c)+2a(p-b)(p-c)$

ឬ $abc=2p(p-b)(p-c)\quad(2)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) បញ្ជាក់ថាការឧបមា $N'=N$ ពិត

ដូចនេះបីចំនុច O , I , N រត់ត្រង់គ្នា ។

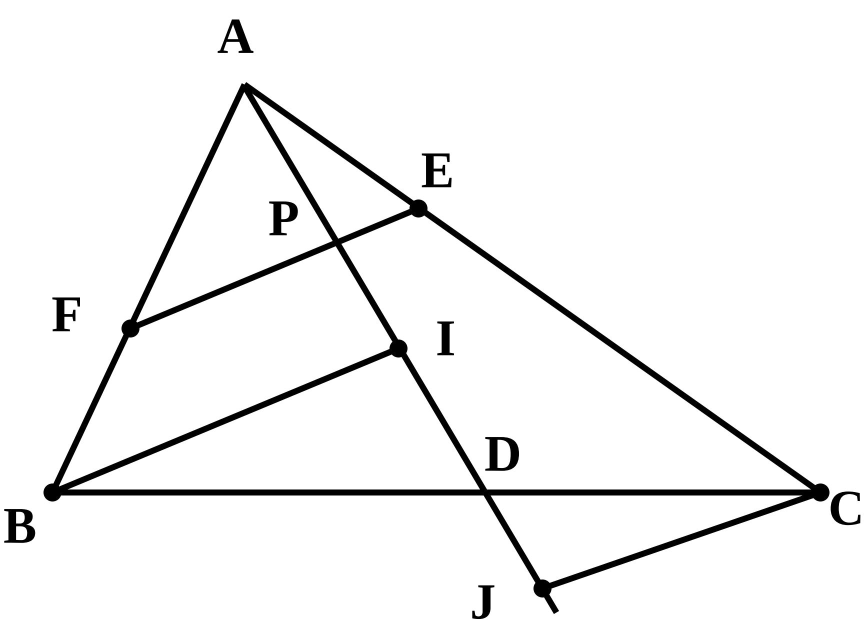
លំហាត់ទី៩ (Indonesia National Science Olympiad 2009)

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC គេយក D,E,F ជាចំនុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ $[BC]$ $[C\ ]A,[A\ ]$ រៀងគ្នា ។ យក P ជាចំនុចប្រសព្វរវាង $[AD]$ និង $[EF]$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{A}{A}\times D + \frac{BA}{FA}\times CD = \frac{CA}{EA}\times BB$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{AB}{AF}\times DC+\frac{AC}{AE}\times DB=\frac{AD}{AP}\times BC$



សង់ $(BI)//(EF)$ និង $(CJ)//(EF)$ ដែល $I, J \in (AD)$ ។

គេមាន $\Delta\ IBD$ និង $\Delta\ JCD$ ដូចគ្នានោះគេបាន $\frac{ID}{JD} = \frac{DB}{DC}$

ឬ $\frac{ID}{DB} = \frac{JD}{DC} = \frac{ID + JD}{DB + DC} = \frac{IJ}{BC}$ ឬ $ID = \frac{DB.IJ}{BC}$

និង $JD = \frac{IJ.DC}{BC}$ ។

គេមាន $AI = AD - ID = AD - \frac{DB.IJ}{BC}$

គេបាន $\frac{AI.DC}{AP} = \frac{AD.DC}{AP} - \frac{DB.IJ.DC}{AP.BC}$ (1)

ម៉្យាងទៀត $AJ = AD + JD$ តែ $JD = AD + \frac{IJ.DC}{BC}$

គេបាន $\frac{AJ.DB}{AP} = \frac{AD.DB}{AP} + \frac{DB.IJ.DC}{AP.BC}$ (2)

បូកសមភាព (1) & (2) គេបាន៖

$$\frac{AI.DC}{AP} + \frac{AJ.DB}{AP} = \frac{AD.DC + AD.DB}{AP} = \frac{AD.BC}{AP} \quad (3)$$

ព្រោះ $DC + DB = BC$ ។

គេមាន ΔABI និង ΔAFP ដូចគ្នានោះគេបាន $\frac{AB}{AF}=\frac{AI}{AP}$ (4)

គេមាន ΔAPJ និង ΔAJC ដូចគ្នានោះគេបាន $\frac{AC}{AE}=\frac{AJ}{AP}$ (5)

យកសមីការ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន៖

$$\frac{AB}{AF}\times DC+\frac{AC}{AE}\times DB=\frac{AD}{AP}\times BC$$ ពិត ។

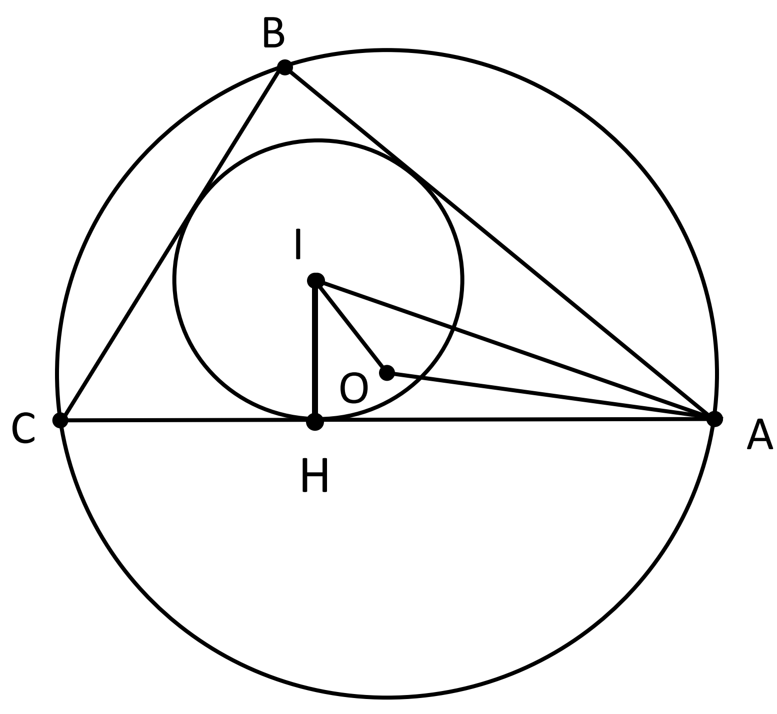
លំហាត់ទី១០ (Hong Kong National Olympiad 1999)

គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង O ជារង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ដែលមិនមែនជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

ចូរបង្ហាញថា $\angle AIO \le 90^o$ លុះត្រាតែ $2BC \le AB + AC$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\angle AIO \le 90^o$ លុះត្រាតែ $2BC \le AB + AC$



តាង a,b,c ជាជ្រុង និង $r\ ,R$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ

ត្រីកោណ ABC ។ បើ $\angle AIO \le 90^o$ នោះ

$OI^2 + IA^2 \ge OA^2$ (1) ,យក H ជាចំណោលកែងនៃ I លើ $[CA]$

គេបាន $IH = r\ ,\ AH = p - a$ ដែល $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

ក្នុង $\Delta \perp AIH$ គេមាន $IA^2 = (p-a)^2 + r^2$

តាមរូបមន្ត Euler គេមាន $OI^2 = R^2 - 2rR$ ហើយ $OA = R$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $(p-a)^2 + r^2 + R^2 - 2rR \ge R^2$

$$\Leftrightarrow (p-a)^2 + r^2 \ge 2rR$$

$$\Leftrightarrow (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \ge 2\frac{abc}{4Rp}.R$$

$$\Leftrightarrow 2p(p-a)^2 + 2(p-a)(p-b)(p-c) \ge abc$$

$$\Leftrightarrow 2(p-a)[p^2 - ap + p^2 - (b+c)p + bc] \ge abc$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)bc \ge abc$$

$$\Leftrightarrow b + c \ge 2a$$

ដូចនេះ $\angle AIO \le 90^o$ លុះត្រាតែ $2BC \le AB + AC$ ។

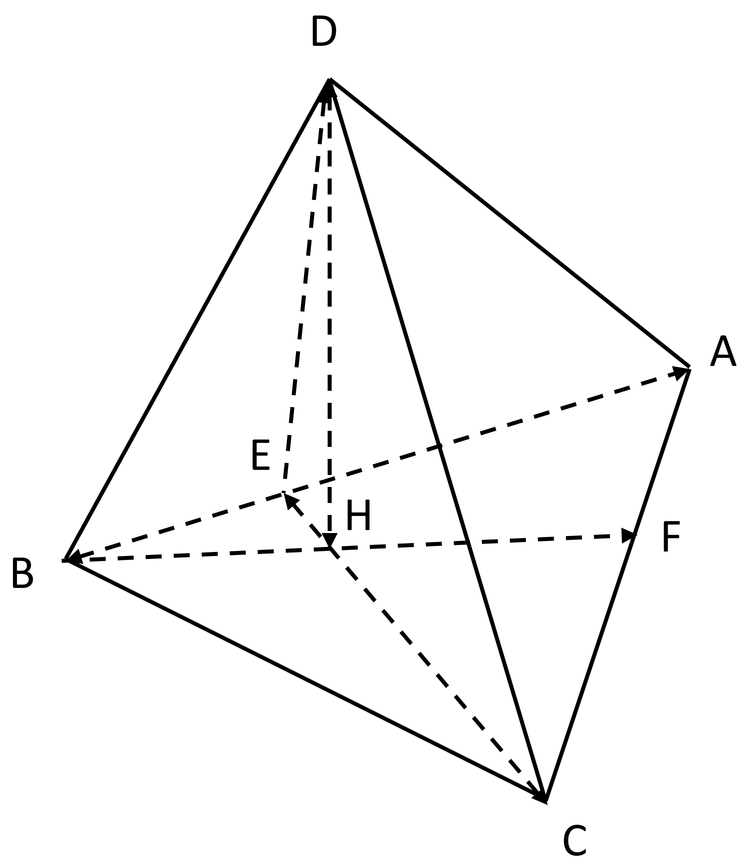
លំហាត់ទី១១ (IMO 1970)

ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $\mathbf{ABCD}$ មួយមាន $\angle \mathbf{BDC} = \mathbf{90^o}$
ហើយជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$
ជាប្រសព្វនៃកម្ពស់នៃ $\mathbf{\Delta ABC}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)}$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព?

ដំណោះស្រាយ



សង់កម្ពស់ **[CE]** និង **[BF]** នៃត្រីកោណ **ABC** ហើយតាង **H** ជាប្រសព្វរវាងកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ។

គេមាន $(CED)\perp(ABC)$ និង $(AB)\perp(CE)$ ដែល (CE) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (CED) និង (ABC) នោះគេទាញបាន $(AB)\perp(CDE)$ ហើយដោយ $(DE)\subset(CDE)$ នោះគេបាន $(AB)\perp(DE)$ នាំឱ្យ ΔBED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ **E** ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័ $BD^2=DE^2+EB^2$ **(1)**

តាមសម្មតិកម្ម $\angle BDC=90^0$ នោះ ΔBDC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ **D**

គេបាន $BC^2=BD^2+CD^2$ **(2)**

យក **(1)** ជួសក្នុង **(2)** គេបាន $BC^2=DE^2+EB^2+CD^2$

តែ $BC^2=CE^2+EB^2$ នោះគេទាញបាន៖

$CE^2+EB^2=DE^2+EB^2+CD^2$ ឬ $CE^2=DE^2+CD^2$

នាំឱ្យ ΔCED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ **D** ។

គេបាន $(CD)\perp(ED)$ និង $(CD)\perp(BD)$ នោះ $(CD)\perp(ABD)$

ដោយ $(AD)\subset(ABD)$ នោះ $(CD)\perp(AD)$ នាំឱ្យ ΔCDA

ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $(AD)\perp(BD)$ នាំឱ្យ ΔADB

ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័គេបាន $\begin{cases} AB^2 = AD^2 + BD^2 \\ BC^2 = BD^2 + CD^2 \\ CA^2 = AD^2 + CD^2 \end{cases}$

គេទាញ $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ (3)

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy} - \text{Schwarz}$ គេមាន៖

$$(AB + BC + CA)^2 \le 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) \ (4)$$

$(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ ពិត

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $AB = BC = CA$

ក្នុងករណីនោះគេបាន ABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ **ABC** ជាត្រីកោណមួយហើយ **D** ជាជើងនៃកម្ពស់គូស

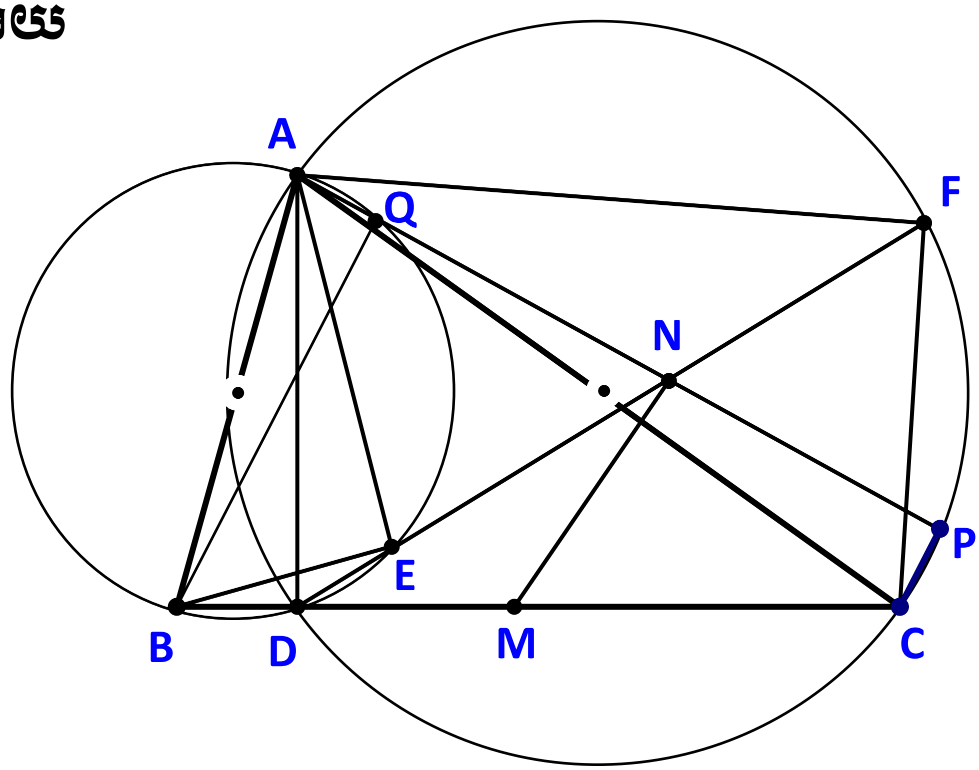
ពីកំពូល **A** ។

យក **E** និង **F** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់កាត់តាម**D** ដោយដឹងថា **AE**
កែងនឹង **BE** ហើយ **AF** កែងនឹង **CF** ដែល **E** និង **F** ខុសពី **D**

យក **M** និង **N** ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ **BC** និង **EF** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា **AN** កែងនឹង **NM** ។

ដំណោះស្រាយ



តាង (w_1) និង (w_2) ជារង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិតរៀងគ្នា AB និង AC ។

គេបាន $E \in (w_1)$ ព្រោះ $AE \perp BE$ ហើយ $F \in (w_2)$ ព្រោះ $AF \perp CF$ ។

តាង P និង Q ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AN) ជាមួយ(w_1) និង (w_2) រៀងគ្នា ។

ចំនុច N នៅក្រៅរង្វង់ (w_1) នោះគេបាន $NE.ND = NQ.NA$ (1)

ព្រោះ N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ EF ។

ចំពោះរង្វង់ (w_2) គេមាន $NF.ND = NP.NA$ (2)

តាម $(1) \& (2)$ គេទាញបាន $NQ.NA = NP.NA$ ឬ $NQ = NP$

ដោយ $MB = MC$ នោះគេបាន $MN // PC$ ហើយដោយ

$AP \perp PC$

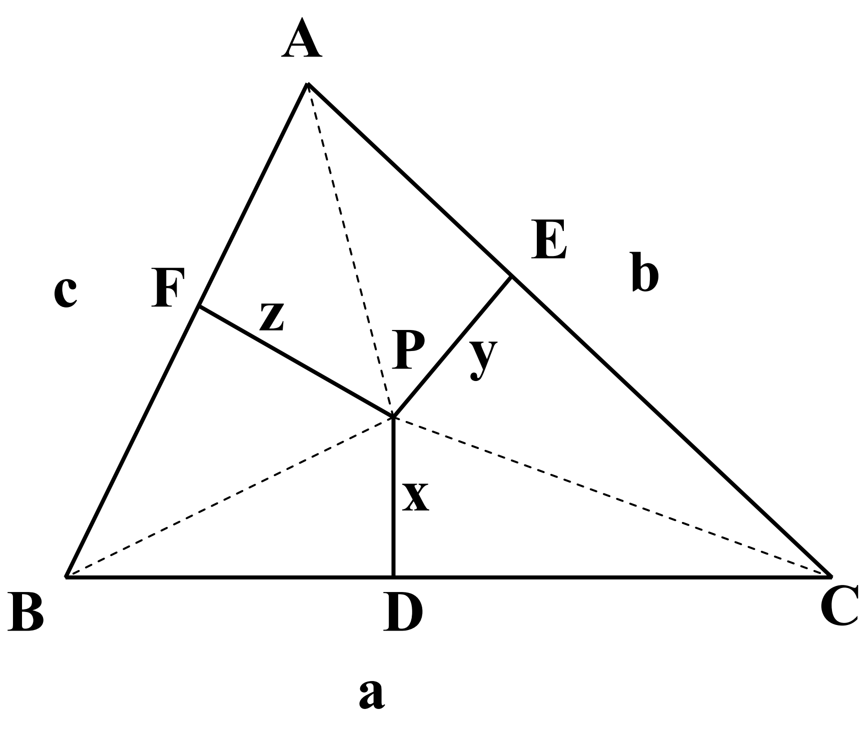
ដូចនេះ $AN \perp NM$ ។

លំហាត់ទី១៣ (IMO 1981)

គេយក $\mathbf{P}$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ហើយ $\mathbf{D,E,F}$ ជាជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{P}$ ទៅបន្ទាត់ $\mathbf{BC,CA,AB}$ រៀងគ្នា ។ ចូរកំណត់គ្រប់ចំណុច $\mathbf{P}$ ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{\mathbf{BC}}{\mathbf{PD}}+\dfrac{\mathbf{CA}}{\mathbf{PE}}+\dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{PF}}$ អប្បបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំណុច $\mathbf{P}$



តាង $BC = a, AC = b$, $AB = c$ ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះ

យក $PD = x$, $PE = y$, $PF = z$ ជាចម្ងាយពី P ទៅបន្ទាត់

BC, CA, AB រៀងគ្នា ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ ៖

$$S = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB} = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$$

គេទាញ $ax + by + cz = 2S$ ។ តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz

$$(a + b + c)^2 \le (ax + by + cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)$$

គេទាញ $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \ge \frac{(a + b + c)^2}{2S}$

វិសមភាពនេះក្លាជាសមភាពលុះត្រាតែ $\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}} = \frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}} = \frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}}$

គេទាញបាន $x = y = z$ នោះមានន័យថា $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ អប្បបរមា

នៅពេលដែលចំណុច P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។

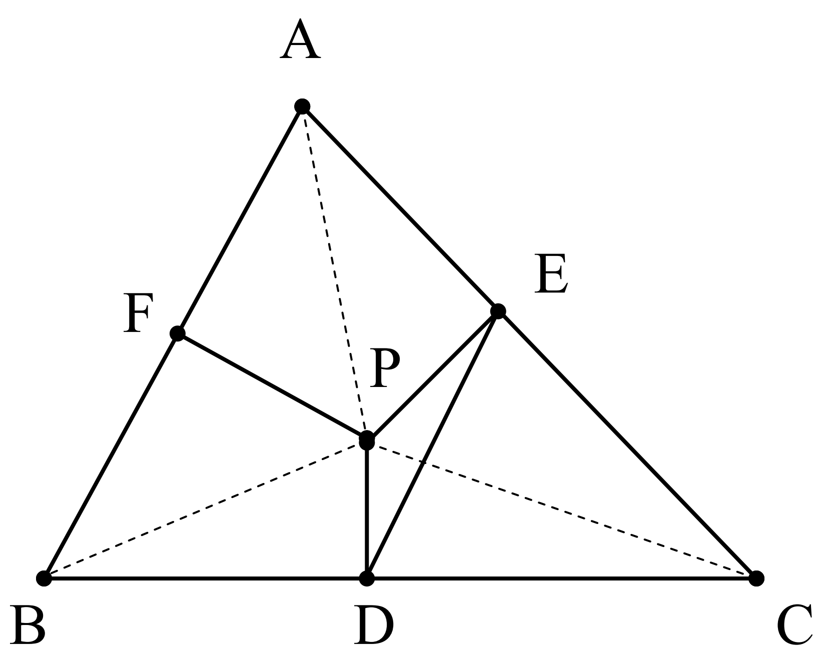
លំហាត់ទី១៤

គេយក $\mathbf{P}$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ហើយ $\mathbf{D,E,F}$ ជាជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{P}$ ទៅបន្ទាត់ $\mathbf{BC,CA,AB}$ រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{PA+PB+PC \geq 2(PD+PE+PF)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\mathbf{PA+PB+PC \geq 2(PD+PE+PF)}$



គេមាន $\angle PDC + \angle PEC = 180^o$ នោះ **PDCE** ជាចតុកោណចារឹក

ក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត **PC** ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុង ΔPDE គេបាន ៖

$DE^2 = PD^2 + PE^2 - 2PD.PE.\cos\angle DPE$ តែ $\angle DPE = 180^o - C$

$$
\begin{aligned}
DE^2 &= PD^2 + PE^2 + 2PD.PE.\cos C \\
&= PD^2 + PE^2 + 2PD.PE.\cos(180^o - (A+B)) \\
&= PD^2 + PE^2 - 2PD.PE\cos(A+B) \\
&= (PD\sin B + PE\sin A)^2 + (PD\cos B - PE\cos A)^2
\end{aligned}
$$

ព្រោះ $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ ។

តែ $(PD\cos B - PE\cos A)^2 \ge 0$ នោះ $DE \ge PD\sin B + PE\sin A$

ត្រីកោណ **CDE** ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត **PC** នោះតាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

គេបាន $PC = \dfrac{DE}{\sin C} \ge PD.\dfrac{\sin B}{\sin C} + PE.\dfrac{\sin A}{\sin C}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $PA \ge PF.\dfrac{\sin B}{\sin A} + PE.\dfrac{\sin C}{\sin A}$ (2)

និង $PB \ge PF.\frac{\sin A}{\sin B} + PD.\frac{\sin C}{\sin B}$ (3) ។

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន ៖

$$PA + PB + PC \ge PD(\frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C}) + PE(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C}) + PF(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B})$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

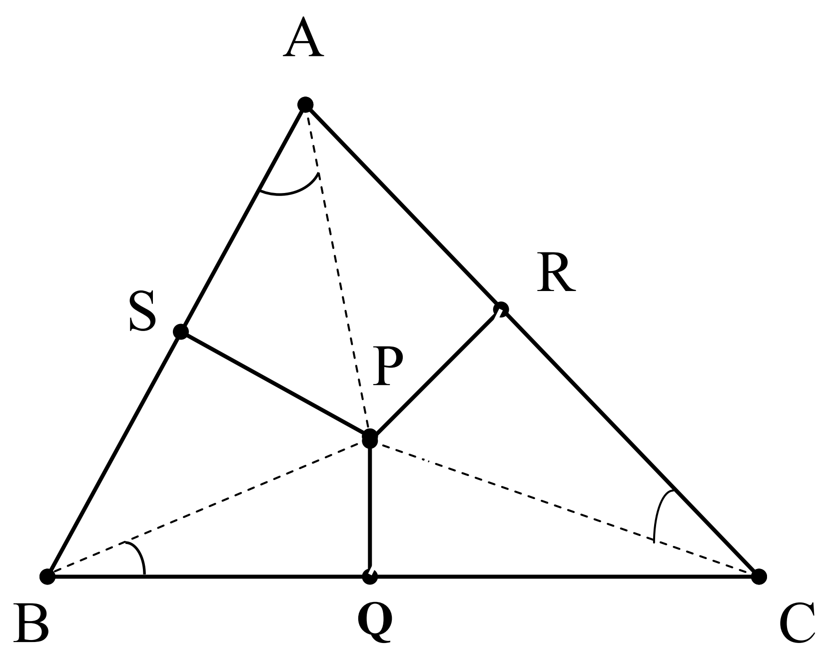
$$\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} \ge 2 \ , \ \frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C} \ge 2 , \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} \ge 2$$

ដូចនេះ $PA + PB + PC \ge 2(PD + PE + PF)$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយនិង **P** ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ **ABC** ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចមួយនៃមុំ $\angle \mathbf{PAB}, \angle \mathbf{PBC}$ និង $\angle \mathbf{PCA}$ ត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើទៅនឹង $\mathbf{30^o}$ ។

ដំណោះស្រាយ



យើងសន្មតថា $\angle \mathbf{PAB} = \alpha$, $\angle \mathbf{PBC} = \beta$, $\angle \mathbf{PCA} = \gamma$

យក **Q**,**R**,**S** ជាចំណោលកែងនៃ **P** លើ **BC**,**CA**,**AB** រៀងគ្នា ។

គេបាន $\mathbf{\sin\alpha = \frac{PS}{PA}}$, $\mathbf{\sin\beta = \frac{PQ}{PB}}$, $\mathbf{\sin\gamma = \frac{PR}{PC}}$ ។

ឧបមាថាមុំ α,β,γ ទាំងអស់សុទ្ធតែធំជាង 30^o នោះមុំ α,β,γ នីមួយៗ

ត្រូវតូចជាង 150^o ។ គេបាន $\sin\alpha > \frac{1}{2}$, $\sin\beta > \frac{1}{2}, \sin\gamma > \frac{1}{2}$

គេទាញ $\frac{PS}{PA} > \frac{1}{2}, \frac{PQ}{PB} > \frac{1}{2}, \frac{PR}{PC} > \frac{1}{2}$

ហេតុនេះ $PA + PB + PC < 2(PQ + PR + PS)$

ដោយ $PA + PB + PC \geq 2(PQ + PR + PS)$

(វិសមភាព Erdos-Mordell : មើលសម្រាយលំហាត់ទី14)

នាំឲ្យការឧបមាខាងលើមិនពិត ។

ដូចនេះយ៉ាងតិចមួយនៃមុំ $\angle PAB, \angle PBC$ និង $\angle PCA$ ត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើទៅនឹង 30^o ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ប៉ះនឹងជ្រុង BC,CA,AB

រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច D,E,F ។

ស្រាយថា $\left(\frac{BC}{EF}\right)^2+\left(\frac{CA}{FD}\right)^2+\left(\frac{AB}{DE}\right)^2\ge 12$

២-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានកម្ពស់ AD, BE, CF ។

ស្រាយថា $\left(\frac{EF}{BC}\right)^2+\left(\frac{FD}{CA}\right)^2+\left(\frac{DE}{AB}\right)^2\ge \frac{3}{4}$

៣-គេយក P ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ D,E,F

ជាប្រសព្វរវាង AP,BP,CP ជាមួយជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{AD}{AP}+\frac{BE}{BP}+\frac{CF}{CP}\ge\frac{9}{2}$ ។

៤-គេតាង A_1,B_1,C_1 ជាបីចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុង BC,CA,AB នៃ

ΔABC ។ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{2}<\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{AB+BC+CA}<\frac{3}{2}$ ។

៥-គេមានត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c និងផ្ទៃក្រលា S ។

តាង T ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណសមង្ស៍ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC

ខាងលើ ។ ចូរស្រាយថា $T \ge \dfrac{2\sqrt{3}S^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}$ ។

៦-គេមានត្រីកោណពីរ ABC និង XYZ ចារឹកក្នុងរង្វង់តែមួយ ។

គេដឹងថា $AX//BC$, $BY//CA$, $CZ//AB$ ។

តាង a,b,c ជាជ្រុងនៃ ΔABC និង x,y,z ជាជ្រុងនៃ ΔXYZ ។

ស្រាយថា $\dfrac{x+y+z}{a+b+c} \le 1$ និង $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} \le 3$ ។

៧-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A និងមានកម្ពស់ $AH = h$

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{2}-1 \le \dfrac{r}{h} < \dfrac{1}{2}$?

៨-គេតាង $\mathbf{P}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ហើយយក $\mathbf{D,E,F}$ ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $\mathbf{AP,BP,CP}$ ជាមួយជ្រុង $\mathbf{BC,CA,AB}$ រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}\geq 6$ និង $\frac{AP}{PD}.\frac{BP}{PE}.\frac{CP}{PF}\geq 8$

៩-ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចូរស្រាយថា៖

$$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos^2 B+\cos^2 C}{\cos B+\cos C}+\frac{\cos^2 C+\cos^2 A}{\cos C+\cos A}\geq 1+\frac{r}{R}$$

១០-គេមានត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយកែងត្រង់ $\mathbf{A}$ ។ តាង $\mathbf{M}$ $\mathbf{,N,P}$ ជាចំនុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងជាមួយជ្រុង $\mathbf{BC,CA,AB}$ ។

ចូរស្រាយថា $MN+MP\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}BC$ ។

១១-ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត $\mathbf{O}$ កាំ $\mathbf{R}$ ។

តាង R_1,R_2,R_3 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ $\mathbf{OAB,OBC,OCA}$ រៀងគ្នា ។ ស្រាយថា $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\geq\frac{3+2\sqrt{3}}{R}$

១២-(APMO, 1996) តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

១៣-(IMO, 1964) តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$

១៤-(IMO, 1983) តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$ ។

១៥-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 2$ ចូរស្រាយថា $AB^n+AC^n\ge BC^n$ ។

១៦-តាង h_a,h_b,h_c ជាប្រវែងកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC

មួយដែលចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត I និងកាំ r ។ ចូរស្រាយថា៖

ក. $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

ខ. $h_a+h_b+h_c\ge 9r$

១៧-(Korea, 1995) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយហើយតាង L,M,N ជាចំនុចស្ថិតលើជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នា ។ តាង P,Q និង R ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ AL,BM និង CN ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\geq 9$ ។

១៨-(Shortlist IMO, 1997) ប្រវែងជ្រុងនៃឆកោណ $ABCDEF$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB=BC,CD=DE$ និង $EF=FA$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$ ។

១៩-គេយក AD,BE,CF ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC ហើយ PQ,PR,PS ជាចម្ងាយពីចំនុច P ទៅជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{AD}{PQ}+\frac{BE}{PR}+\frac{CF}{PS}\geq 9$ ។

២០-បើ $\mathbf{P}$ ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ដែល

$\ell = \mathbf{PA}, \mathbf{m} = \mathbf{PB}, \mathbf{n} = \mathbf{PC}$ នោះចូរបង្ហាញថា

$$(\ell\mathbf{m} + \mathbf{mn} + \mathbf{n}\ell)(\ell + \mathbf{m} + \mathbf{n}) \geq \mathbf{a}^2\ell + \mathbf{b}^2\mathbf{m} + \mathbf{c}^2\mathbf{n}$$

ដែល $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ជាជ្រុងនៃ $\Delta\mathbf{ABC}$ ។

២១-(APMO, 1997) គេឱ្យ $\mathbf{ABC}$ ជាត្រីកោណមួយ ។

បន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\mathbf{A}$ ជួបអង្កត់ $\mathbf{BC}$ ត្រង់ $\mathbf{X}$ និងជួបរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ

$\Delta\mathbf{ABC}$ ត្រង់ $\mathbf{Y}$ ។ តាង $\mathbf{L_a} = \dfrac{\mathbf{AX}}{\mathbf{AY}}$ ។

គេកំណត់ $\mathbf{L_b}$ និង $\mathbf{L_c}$ តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\mathbf{L_a}}{\sin^2\mathbf{A}} + \dfrac{\mathbf{L_b}}{\sin^2\mathbf{B}} + \dfrac{\mathbf{L_c}}{\sin^2\mathbf{C}} \geq 3$?

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Tel: 017 768 246

www.mathtoday.wordpress.com